**Institut Préparatoire aux Etudes de l'ingénieur de SFAX**

**Département de Technologie**
**Section : PT 2**


# Devoir de contrôle 1

Date: 19 Octobre 2022 — Durée: 2 H

***Données :***

$\star$ La célérité de la lumière dans le vide $c = 3\,10^8 ms^{-1}$

$\star$ La perméabilité magnétique du vide $\mu_0 = 4\pi\,10^{-7} Hm^{-1}$.

$\star \overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}\overrightarrow{A}) = \overrightarrow{grad}(div\overrightarrow{A}) - \overrightarrow{\Delta}\overrightarrow{A}$ $\qquad \star\, sin(p) - sin(q) = 2\,sin(\frac{p-q}{2})\,cos(\frac{p+q}{2})$

$\star$ En coordonnées cylindriques $div\overrightarrow{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$

$\star\, \overrightarrow{rot}\overrightarrow{A} = [\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}]\overrightarrow{u}_r + [\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}]\overrightarrow{u}_\theta + \frac{1}{r}[\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}]\overrightarrow{u}_z$

## *Exercice 1 : Propagation des ondes électromagnétiques dans le vide*

**1-** Écrire les équations de Maxwell dans le vide dépourvu de charges et de courants.

**2-** Établir l'équation de propagation vérifiée par le champ magnétique $\overrightarrow{B}$. On exprimera la célérité $c$ de l'onde en fonction de $\mu_0$ et $\epsilon_0$.

On considère une onde électromagnétique $(O_1)$ dont le champ $\underline{\overrightarrow{B}}_1 = B_0\, e^{i(\omega t + \frac{k}{\sqrt{2}}(x-z))}\overrightarrow{u}_y$ où $B_0, k$ et $\omega$ sont des constantes positives.

**3-** Établir la relation de dispersion liant $k$ et $\omega$.

**4-** Calculer la vitesse de phase $v_\phi$. Le vide est-il un milieu dispersif ? Justifier.

**5-** Vérifier que $(O_1)$ est une onde plane dont on précisera l'équation des plans d'onde, la direction et le sens de propagation. Est-elle transverse magnétique?

**6-** Montrer que le champ électrique $\underline{\overrightarrow{E}}_1 = E_0\, e^{i(\omega t + \frac{k}{\sqrt{2}}(x-z))}(\overrightarrow{u}_x + \overrightarrow{u}_z)$, on exprimera $E_0$ en fonction de $B_0$ et $c$.

**7-a** Définir la polarisation d'une OPPM.

**7-b** Préciser la polarisation de l'onde $(O_1)$. Illustrer par une figure dans le plan $(xOz)$.

**8-** Déterminer le vecteur de Poynting $\overrightarrow{R}_1$. Préciser sa signification physique et son unité.

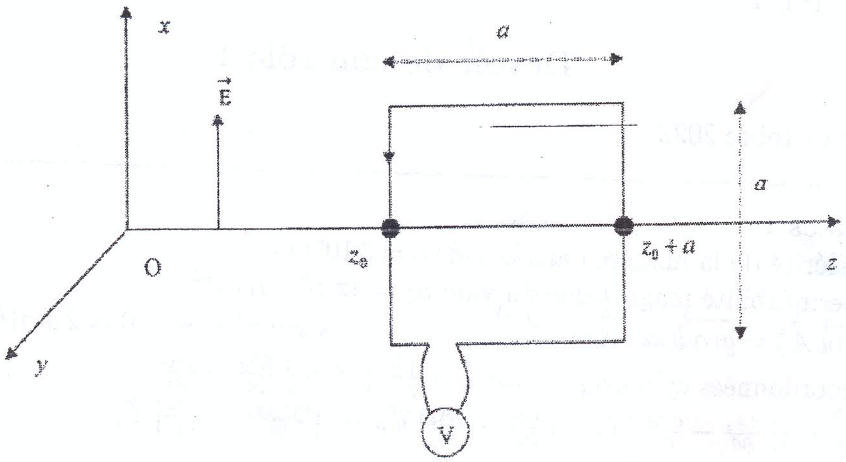
**9-** L'onde arrive sur une cellule détectrice placée perpendiculairement à la direction de propagation de l'onde. Soit $\mathcal{P} = 10W$ la puissance *moyenne* reçue par la cellule de surface $S = 15\,mm^2$.

**9-a** Déterminer l'expression de $B_0$ en fonction de $\mathcal{P}, S, c$ et $\mu_0$.

**9-b** Calculer $B_0$ et $E_0$.

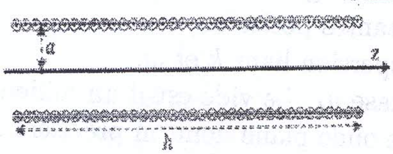
**10-** On considère maintenant une autre onde $(O_2)$ dont le champ électrique $\overrightarrow{E}_2$ est donné par $\overrightarrow{E}_2 = E_m\,cos(\omega(t - \frac{z}{c}))\overrightarrow{u}_x$. Cette onde est détectée par un cadre conducteur carré de coté $a$, fermé sur un voltmètre mesurant une tension efficace $U_{eff}$, et placé dans le plan $xOz$. Le centre du cadre est à l'abscisse $z_0 + \frac{a}{2}$. On se place dans le cas où la longueur $a$ est telle que le champ magnétique ne peut pas être considéré comme uniforme sur la surface du cadre.

**10-a** Calculer le flux magnétique $\Phi(t)$ à travers le cadre, et la force électromotrice $e(t)$.
**10-b** Exprimer la tension efficace $U_{eff}$ en fonction de $c, a, \omega$ et $E_m$.
**10-c** La valeur de $a$ étant fixée, montrer qu'il existe des valeur $\omega_{min}$ de $\omega$ pour lesquelles l'amplitude de $e(t)$ est nulle. Exprimer $\omega_{min}$ en fonction de $c$ et $a$.



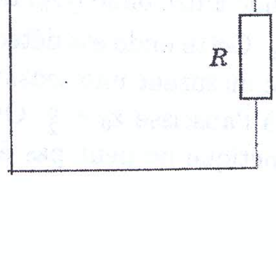

## *Exercice 2 : Solénoïde en régime lentement variable (13 pts)*

On considère un solénoïde d'axe $(Oz)$, de rayon $a$ et de longueur $h \gg a$ et comportant $n = \frac{N}{h}$ spires par unité de longueur. Il est parcouru par un courant d'intensité constante $i_0$. L'intérieur du solénoide est *vide*.




**1-** Justifier, par raisonnement de symétrie, que le champ magnétostatique $\overrightarrow{B}_0 = B_0(r)\overrightarrow{u}_z$.
**2-** Justifier qu'il est uniforme à l'intérieur du solénoide.
**3-** Sachant que le champ est nul à l'extérieur, montrer que $\overrightarrow{B}_0(r < a) = \mu_0 n i_0 \overrightarrow{u}_z$.
**4-** Déterminer l'énergie magnétostatique emmagasinée à l'intérieur du solénoide.
**5-** En déduire l'expression de l'inductance propre $L$ en fonction de $N, \mu_0, a$ et $h$.

On considère le circuit ci-dessous. On ouvre l'interrepteur $K$ à l'instant $t = 0$. On désigne par $i(t)$ l'intensité du courant dans le circuit. On donne $i(t = 0) = i_0$.



6- Montrer que $i(t) = i_0\, e^{-t/\tau}$ où $\tau$ est une constante du temps que l'on déterminera.
7- Calculer l'énergie $W_J$ dissipée par la résistance $R$ entre les instants $t = 0$ et $t = \infty$.

On suppose, dans une première approximation, que la variation de $i(t)$ soit suffisamment lente pour admettre que le champ magnétique s'écrit $\overrightarrow{B}_0(t) = \mu_0\, n\, i_0\, e^{-t/\tau}\overrightarrow{u}_z$.
Le champ $\overrightarrow{B}_0(t)$ est source d'un champ $\overrightarrow{E}_0(M,t)$ en tout point $M$ de l'espace. Ce dernier crée, à son tour, un champ $\overrightarrow{B}_1(M,t)$ paralléle à $\overrightarrow{B}_0(t)$...
8- Justifier que $\overrightarrow{E}_0(M,t) = E_0(r,t)\overrightarrow{u}_\theta$
~~9-a-~~ Montrer que $\overrightarrow{E}_0(r < a, t) = \frac{r}{2\tau}\,\mu_0 n i_0\, e^{-t/\tau}\,\overrightarrow{u}_\theta$
9-b- Calculer $\overrightarrow{E}_0(r > a, t)$.
10- Calculer $\overrightarrow{B}_1(r < a, t)$ sachant que $\overrightarrow{B}_1(0,t) = \overrightarrow{0}$.
11- Montrer que le champ magnétique $\overrightarrow{B} = \overrightarrow{B}_0 + \overrightarrow{B}_1$ peut être confondu à $\overrightarrow{B}_0$ si le rayon $a$ du solénoïde est très inférieur à une valeur $a_0$ qu'on exprimera en fonction de $\tau$ et de $c$.
12- On donne $a = 2\,cm$ , $L = 50\,mH$ et $R = 10\,k\Omega$. Evaluer l'ordre de grandeur de l'erreur relative que l'on commet en confondant $\overrightarrow{B}$ à $\overrightarrow{B}_0$.
13- En supposant satisfaite la condition de la question **11**, écrire les équations de Maxwell vérifiées par le champ électromagnétique $(\overrightarrow{E} \sim \overrightarrow{E}_0, \overrightarrow{B} \sim \overrightarrow{B}_0)$.

*On parle d'une ARQS dite magnétique qu'on supposera vérifiée dans la suite.*

14- Comparer les densités d'énergie électrique $u_e(r < a, t)$ et magnétique $u_{mag}(r < a, t)$ puis simplifier l'expression de la densité d'énergie élecromagnétique $u_{em}(r < a, t)$.
15- Calculer le vecteur de Poynting $\overrightarrow{\Pi}(r < a, t)$.
16- Vérifier l'identité de Poynting.
17- Calculer l'énergie rayonnée $W_{ray}$ entre les instants $t = 0$ et $t = \infty$. Commenter.

⋆⋆⋆ ***Fin de l'épreuve*** ⋆⋆⋆