

Institut Préparatoire aux Etudes de l'ingénieur de SFAX

Département de Technologie
Section : PT 2

Examen de Physique 1

Date : 03 Janvier 2023

Durée : 4 H

Données :

Nombre de pages : 9

* La permittivité électrique du vide $\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ Fm}^{-1}$.

* Masse de l'électron $m = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$

* Charge élémentaire $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$

* La célérité de la lumière dans le vide $c = 3 \times 10^8 \text{ ms}^{-1}$

* $(1+x)^\alpha \sim 1 + \alpha x$

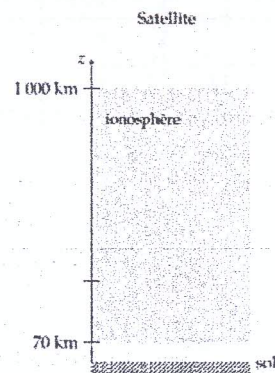
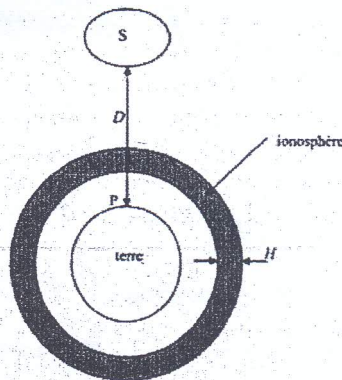
* $\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}} \vec{A}) = \vec{\text{grad}}(\text{div} \vec{A}) - \Delta \vec{A}$

* $2 \cos(p) \cos(q) = \cos(p-q) + \cos(p+q)$

Problème I : Communication par satellite (10 points)

Les communications Terre-Satellite se font par réception ou émission des ondes électromagnétiques. Ces ondes traversent l'atmosphère qu'on assimile au vide, à l'exception de la couche située entre 70 km et 1000 km d'altitude appelée ionosphère. L'ionosphère peut être considérée comme un plasma constitué d'un gaz sous faible pression et partiellement ionisé. C'est un milieu électriquement neutre de permittivité électrique ϵ_0 et de perméabilité magnétique μ_0 , qui renferme, par unité de volume, n_e électrons libres de charge $-e$ et de masse m et n_i ions positifs de charge $+e$ et de masse $M \gg m$. Ces particules sont supposées non relativistes (i.e leurs vitesses $\ll c$).

Pour cette étude, on ne tient pas compte de la géométrie sphérique de la terre. On considère le problème localement plan. L'axe des z , est l'axe vertical ascendant (Figure 1). On envoie depuis la surface de la terre vers le satellite une onde électromagnétique plane, progressive, monochromatique et polarisée rectilignement. Le champ électrique associé à cette onde s'écrit, en notation complexe, $\vec{E}(M, t) = \vec{E}_0 \exp[i(\omega t - kz)]$ avec $i^2 = -1$.



Propagation des ondes électromagnétiques dans l'ionosphère

- 1- En admettant que $\omega/|k|$ est de l'ordre de c , montrer que la contribution magnétique dans la force de Lorentz est négligeable.
- 2- Déterminer la vitesse complexe \vec{V}_e des électrons en fonction de ω, e, m et \vec{E} .
- 3- De même, exprimer la vitesse complexe \vec{V}_i des ions en fonction de ω, e, M et \vec{E} .
- 4- Compte-tenu des valeurs numériques, montrer que la densité du courant $\vec{J} = -i \frac{e^2 n_e}{m \omega} \vec{E}$.
- 5- Y a-t-il dissipation d'énergie lors de la propagation de l'onde dans le plasma ? Pourquoi ?

- 6- Écrire les quatre équations de Maxwell dans le plasma.
- 7- En déduire l'équation aux dérivées partielles satisfaite par le champ \vec{E} dans le plasma.
- 8- Etablir la relation de dispersion de l'onde dans le plasma. On l'écrira sous la forme $k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$ et l'on précisera l'expression de ω_p en fonction de n_e, ϵ_0, e et m .
- 9- La fréquence $f_p = \frac{\omega_p}{2\pi}$ est appelée fréquence de coupure du plasma. Justifier son nom. Comment choisir la fréquence de l'onde électromagnétique utilisée selon qu'on souhaite communiquer avec un satellite situé au-dessus de l'ionosphère (cas du GPS, radio FM...) ou qu'on souhaite propager une émission radio à très grande distance au-dessus de la terre (radio LW,...)?
- 10- On suppose $f > f_p$, exprimer en fonction de c, f et f_p , la vitesse de groupe V_g d'un paquet d'onde très étroit centré sur la fréquence f .

Correction ionosphérique pour les systèmes G.P.S

Un satellite (S), supposé ponctuelle, se trouve au-dessus de l'ionosphère, d'épaisseur H , à la verticale d'un point P de la terre. On note D la distance SP (figure 1).

11- Etablir l'expression du temps t_0 mis par une onde de fréquence $f \gg f_p$ pour parvenir du satellite jusqu'au point P en fonction de D, H, c, f et f_p .

12- Le satellite émet simultanément à $t = 0$ deux paquets d'ondes très étroits, centrés autour de f_1 et f_2 , avec $f_1 > f_2 \gg f_p$. Ils arrivent respectivement en P aux dates t_1 et t_2 .

Montrer que $\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{H f_p^2}{2c} \left(\frac{1}{f_2^2} - \frac{1}{f_1^2} \right)$.

13- En déduire à l'aide des résultats précédent que $D = ct_0 - d$, où l'on exprimera d en fonction de $c, \Delta t, f, f_1$ et f_2 . La distance d est appelée correction ionosphérique, elle est obtenue par mesure de Δt en temps réel.

14- On donne $f = f_1 = 1575 \text{ MHz}$, $f_2 = 1228 \text{ MHz}$ et $f_p = 9 \text{ MHz}$. Calculer d . Commenter cette valeur dans le cas d'une localisation automobile.

En réalité la densité des électrons libre varie avec l'altitude z , comme le montre la figure 2-a.

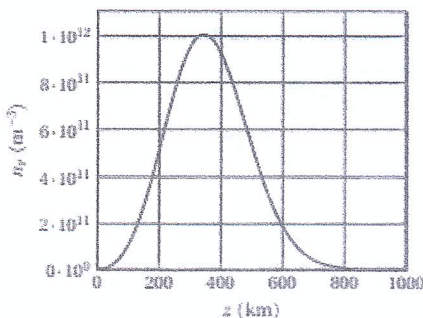


Figure 2-a

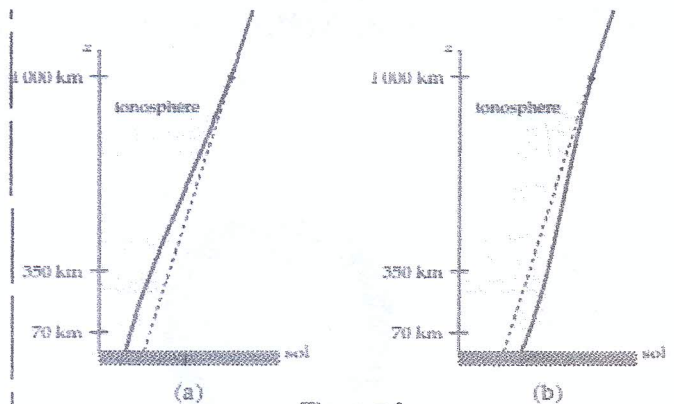


Figure 2-b

- 15- Evaluer la fréquence du plasma f_p pour la densité maximale d'électrons libres.
- 16- Soit V_ϕ la vitesse de phase des ondes électromagnétiques dans le plasma. Déterminer l'expression de l'indice optique $N = \frac{c}{V_\phi}$ en fonction de f et f_p . Quel est sa particularité?
- 17- La fréquence de l'onde est f_1 . Montrer que $N \approx 1 - \frac{a}{f_1^2} n_e$ où $a = \frac{e^2}{8\pi^2 m_e \epsilon_0} \approx 0,45 \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$. Tracer la fonction $(N(z) - 1) \times 10^5$ après avoir évalué ses extrema.
- 18- On a tracé sur la figure 2-b, deux trajets possibles d'une onde électromagnétique harmonique traversant l'ionosphère et soumis à la variation de l'indice optique (le tracé pointillé correspond à la ligne droite depuis le satellite). Quel est le bon tracé? Justifier.

19- On considère de nouveau un paquet d'ondes de fréquence centrale f_1 émis par un satellite en haute altitude ($z > H = 1000\text{km}$). Il est reçu par un récepteur au sol ($z = 0$) à la verticale du satellite. On note τ_1 le retard provoqué par la présence de l'ionosphère par rapport à une onde qui se propagerait dans le vide selon le même trajet et $L_1 = c\tau_1$. Montrer que

$$L_1 \approx \frac{a}{f_1^2} C_{ET} \text{ où } C_{ET} = \int_0^H n_e(z) dz$$

C_{ET} appelé « contenu électronique totale de l'ionosphère ».

20- Sachant que $C_{ET} = 1,5 \times 10^{17} \text{m}^{-2}$. Calculer l'erreur de distance L_1 . Commenter.

La valeur du C_{ET} fluctue principalement selon l'activité solaire et l'alternance jour-nuit. La correction nécessaire ne peut être connue en temps réel si l'on utilise qu'une seule fréquence du signal. C'est pourquoi les signaux GPS utilisent deux fréquences f_1 et f_2 .

21- Soit $\tau_{ret} = \tau_2 - \tau_1$ le retard de réception entre les deux signaux de fréquence f_1 et f_2 . Montrer que la mesure de τ_{ret} permet de déterminer le C_{ET} à une date donnée.

Application numérique : on mesure $\tau_{ret} = 6,7 \times 10^{-7} \text{s}$. Calculer C_{ET} .

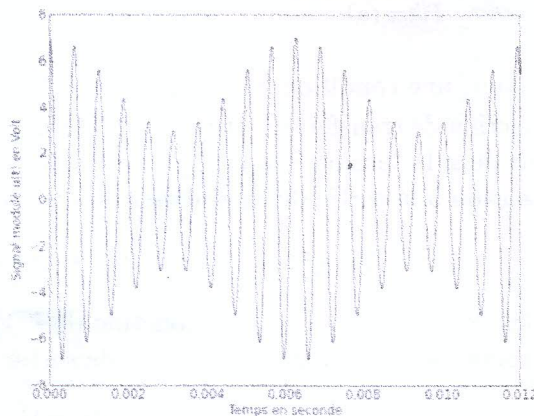
Traitement du signal

Le but de la modulation est de translatier le spectre d'un signal B.F [sons, musique , parole] vers les H.F pour pouvoir le transmettre facilement par voie hertzienne. La radio , la Télévision , les lignes téléphoniques utilisent le procédé de modulation . Le signal H.F est appelé porteuse. Le signal B.F est appelé signal modulant .

On peut procéder de deux manières :

- Modulation d'amplitude de la porteuse
- Modulation de la fréquence du signal H.F

La modulation d'amplitude MA (AM en anglais) est une technique de modulation d'un signal. On considère ici un signal informatif $s_{inf}(t) = S \cos(\omega_i t)$, modulé en amplitude par une onde porteuse $e_p(t) = E \cos(\omega_p t)$ de pulsation ω_p , avec $\omega_i \ll \omega_p$. Ce signal modulé évolue au cours du temps selon l'expression : $u(t) = U(1 + m_a \cos(\omega_i t)) \cos(\omega_p t)$ où m est le taux de modulation. Son allure est représentée sur la figure ci-dessous :



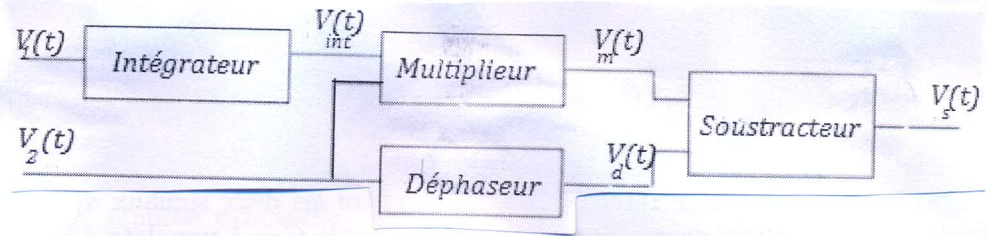
22- Déterminer les valeurs numériques du taux de modulation m_a et des fréquences f_i et f_p . (En pratique, le décalage entre ces deux fréquences est plus important !)

On s'intéresse maintenant à l'opération de démodulation afin de retrouver le signal $s_{inf}(t)$. Lors de la démodulation par détection synchrone ,on envoie l'onde porteuse et le signal modulé dans un multiplieur qui fournit en sortie la tension : $s_m(t) = k u(t) e_p(t)$

23- On supposera $0 < m_a < 1$, tracer le spectre de $s_m(t)$.

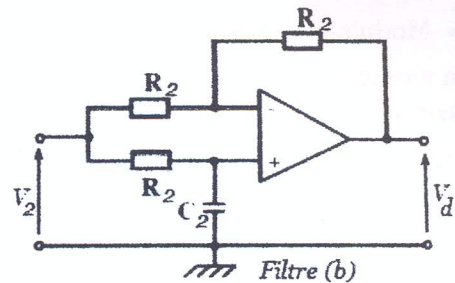
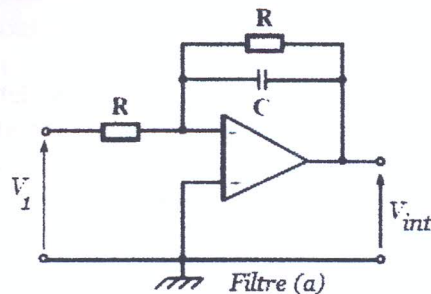
24- Indiquer quelle(s) opération(s) de traitement du signal est (sont) encore nécessaire(s) pour retrouver le signal informatif.

On peut réaliser une modulation de fréquence MF (FM en anglais) suivant le schéma de la figure ci-dessous. Il utilise un montage intégrateur, un réseau déphaseur, un multiplieur et un soustracteur.



- Le multiplieur fournit en sortie la tension : $V_m(t) = k V_{int}(t) V_2(t)$.
- Le soustracteur fournit à la sortie la tension $V_s(t) = V_d(t) - V_m(t)$.
- On suppose qu'à $t = 0$, $V_{int}(0) = 0$.
- On impose par ailleurs, à l'entrée de l'ensemble, les deux tensions : $V_1(t) = V_{1m} \cos(\omega_1 t)$ et $V_2(t) = V_{2m} \cos(\omega_2 t)$ avec $\omega_2 \gg \omega_1$.
- Les amplificateurs sont supposés idéaux et fonctionnent en régime linéaire.

On considère les circuits de la figure ci-dessous :



25- Préciser, en justifiant, une condition sur ω_1 afin d'obtenir $V_{int}(t) = -\frac{1}{RC} \int V_1(t) dt$.

26- Montrer que la fonction de transfert du filtre (b) est de la forme $\underline{H} = \frac{1-jx}{1+jx}$ avec $x = R_2 C_2 \omega_2$.

27- Pour quelle valeur de x la tension $V_d(t)$ est déphasée de $-\pi/2$ par rapport à $V_2(t)$?

28- Montrer que la tension à la sortie du modulateur peut se mettre sous la forme :

$$V_s(t) = V_{2m} \sqrt{1 + \epsilon^2 \sin^2(\omega_1 t)} \sin(\omega_2 t + \phi(t))$$

Préciser les expressions de ϵ et de $\tan(\phi(t))$ en fonction de $k, V_{1m}, R, C, \omega_1$ et de t .

29- Lorsque ϵ et $\phi(t)$ sont petits devant 1, la tension de sortie peut se mettre sous la forme :

$$V_s(t) = V_{2m} \sin(\omega_2 t + m_f \sin(\omega_1 t)) = V_{2m} \sin(\psi(t))$$

ω_2 est la pulsation élevée de la porteuse, m_f le taux de modulation de pulsation modulante ω_1 et $\psi(t)$ la phase instantanée. Préciser l'expression de m_f en fonction de k, V_{1m}, R, C et ω_1 .

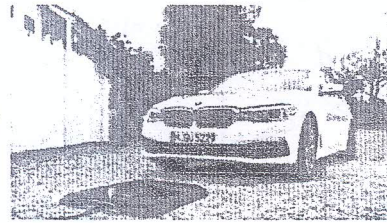
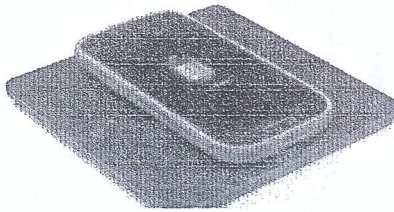
30- On appelle $\Omega(t) = \frac{d\psi}{dt}$ la pulsation instantanée du $V_s(t)$. Établir la relation liant $\Omega, \omega_2, k, R, C$ et $V_1(t)$. Justifier le nom de modulation de fréquence associé à ce traitement du signal.

Problème II : Transmission d'énergie électrique sans fil

La nécessité actuelle de supprimer les fils et réduire l'encombrement, ou encore la multiplication des appareils électriques à faible consommation contribuent au développement des techniques et dispositifs de transmission d'énergie sans fil.

Des applications technologiques récentes permettent d'effectuer la recharge d'objets électroniques portables (smartphone...) ou de voitures électriques sans qu'il y ait nécessité de brancher l'appareil électriquement. Le simple fait de poser l'appareil sur une platine, ou de garer le véhicule au-dessus du dispositif, déclenche la recharge de ses batteries.

Il existe aujourd'hui différents moyens de transmission de puissance sans fil. Citons notamment le couplage inductif non résonant en champ proche, le couplage inductif résonant en champ proche et le rayonnement en champ lointain. Nous développerons dans ce problème certains aspects du couplage inductif, non résonant puis résonant.



Dans tout le problème, on fait l'hypothèse d'être dans le cadre de l'Approximation des Régimes Quasi Stationnaires (ARQS) : on calcule le champ magnétique $\vec{B}(M, t)$ créé par des courants variables $i(t)$, comme en magnétostatique par le théorème d'Ampère.

Étude des bobines utilisées

1- Rappeler les équations locales de Maxwell dans l'ARQS magnétique.

Considérons une bobine "plate", (Figure 1) constituée (pour simplifier) de N spires circulaires identiques, d'axe de révolution Oz et de rayon a , placées dans le plan $z = 0$ et parcourues par un courant d'intensité $i(t)$.

2- On considère un point M de l'axe Oz , de cote $z > 0$. Préciser, en justifiant, la parité et la direction du champ $\vec{B}(M, t)$ au point M .

3- On donne sur cette figure la carte de champ de la bobine. Que peut-on déduire de ces observations topologiques ?

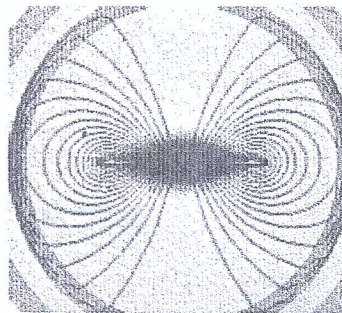
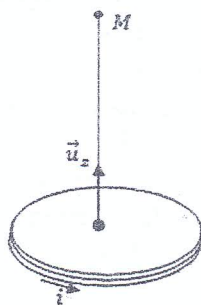


Figure 1 : Bobine plate (gauche) - Carte du champ (droite)

On donne l'expression $B_z(z)$ du champ magnétique créé par la bobine au point M :

$$B_z(z) = \frac{\mu_0 N i(t) a^2}{2(z^2 + a^2)^{3/2}}$$

4- Représenter l'allure de la fonction $B_z(z)$. Exprimer le champ magnétique maximal $B_{z,max}$, et déterminer, en fonction de a , la distance $z_{1/2}$ tel que $B_z(z_{1/2}) = \frac{B_{z,max}}{2}$.

Transfert de puissance : rendement de Yates

Modélisons à présent le transfert inductif de puissance entre deux bobines, comme celles représentées sur la figure 2-a. Une bobine émettrice de résistance R_1 et d'inductance propre L_1 , comportant N_1 spires circulaires de rayon a , est parcourue par un courant d'intensité $i(t) = I_0 \cos(\omega t)$ imposé par un générateur (non représenté sur la figure). Considérons également une bobine réceptrice, de résistance R_2 , d'inductance propre L_2 et comportant N_2 spires de rayon b , située à une distance d de la bobine émettrice.

Pour simplifier, on suppose que le champ magnétique créé par la bobine émettrice est uniforme dans le plan de la bobine réceptrice.

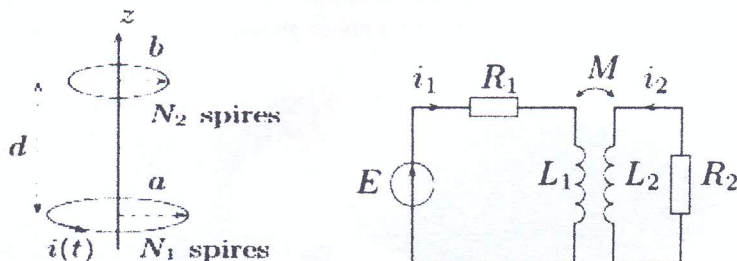


Figure 2 – Bobine plate (2-a) - Circuits couplés par mutuelle induction (2-b)

5- On désigne par $\mathcal{P}_1(t)$ la puissance instantanée reçue par la bobine émettrice de la part du générateur. Montrer que la moyenne temporelle de cette puissance $\langle \mathcal{P}_1 \rangle = \frac{1}{2} R_1 I_0^2$.

6- Justifier l'apparition d'une force électromotrice (f.é.m) $e(t)$ aux bornes de la bobine réceptrice puis déterminer son expression en fonction de $a, b, d, N_1, N_2, I_0, \omega$ et t .

7- En négligeant l'inductance propre L_2 , en déduire le courant $i_2(t)$ et la puissance moyenne $\langle \mathcal{P}_2 \rangle$ reçue par cette dernière de la part de la bobine émettrice.

8- On définit le rendement de transmission de puissance par $\eta = \frac{\langle \mathcal{P}_2 \rangle}{\langle \mathcal{P}_1 \rangle}$. Montrer que

$$\eta = \frac{(\pi \mu_0 N_1 N_2 a^2 b^2)^2}{4 R_2 R_1 (d^2 + a^2)^3} \omega^2$$

Ce résultat constitue la loi de Yates.

Modélisation du couplage : inductance mutuelle

On propose dans cette sous-partie une modélisation plus générale du couplage magnétique. Le couplage est quantifié par l'inductance mutuelle M entre les deux bobines (figure 2-b).

9- Etablir le système d'équations électriques couplées vérifiées par $i_1(t)$ et $i_2(t)$.

10- Montrer que ce système d'équations conduit au bilan de puissance $E i_1 = \mathcal{P}_{\text{Joule}} + \frac{d\mathcal{E}_{\text{mag}}}{dt}$ avec \mathcal{E}_{mag} une quantité à exprimer en fonction de L_1, i_1, L_2, i_2 et M .

11- Soit $\xi = \frac{i_1}{i_2}$. Montrer que $\mathcal{E}_{\text{mag}} = \frac{1}{2} i_2^2 A(\xi)$ où $A(\xi)$ est un trinôme que l'on explicitera.

12- En admettant que $\mathcal{E}_{\text{mag}} \geq 0$, montrer que $M \leq M_{\text{max}}$ où M_{max} dépend de L_1 et L_2 .

13- Citer d'autres applications de la mutuelle induction dans le domaine de l'industrie.

Résultats expérimentaux

On cherche à tester expérimentalement la prédiction théorique de Yates obtenue en 8-.

Un générateur (GBF), délivrant un signal sinusoïdal de fréquence f , alimentant la bobine émettrice. On place à une distance d de celle-ci une bobine réceptrice identique, mise en série avec une résistance. La figure 3 donne la variation du rendement η avec la fréquence f imposée par le GBF, tous les autres paramètres demeurant constants.

14- Estimer le rendement expérimental maximal η_{max} , ainsi que la fréquence f_{max} à laquelle celui-ci est atteint.

15- La loi théorique de Yates est-elle vérifiée expérimentalement ? Commenter.

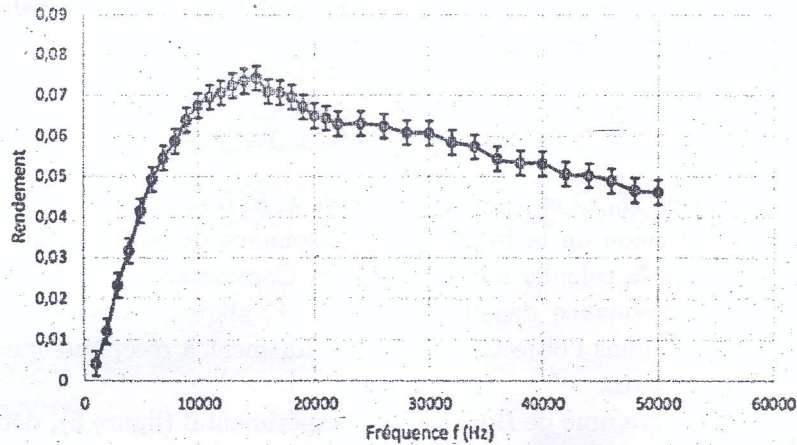


Figure 3 : Rendement expérimental en fonction de la fréquence

Couplage inductif résonant

Pour observer un couplage inductif résonant, ajoutons au montage de la question 9) des condensateurs identiques de capacité C dans les deux circuits. On définit le coefficient de couplage $k = M/M_{max}$. On désigne par v_1 et v_2 les tensions aux bornes du circuit primaire et secondaire respectivement. On fournit sa fonction de transfert en sortie ouverte :

$$\underline{H} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{j\omega k L}{R + j\omega(L + R^2 C) - 2\omega^2 R L C + j\omega^3 C L^2 (k^2 - 1)}$$

Soit $R = 10\Omega$, $L = 0,86mH$ et $C = 30nF$. En utilisant l'expression de la fonction de transfert, on trace (figure 4), pour une valeur de k arbitraire, le diagramme de Bode de ce système représentant l'évolution du gain en décibels $G_{dB} = 20 \log|\underline{H}|$ en fonction de la fréquence f .

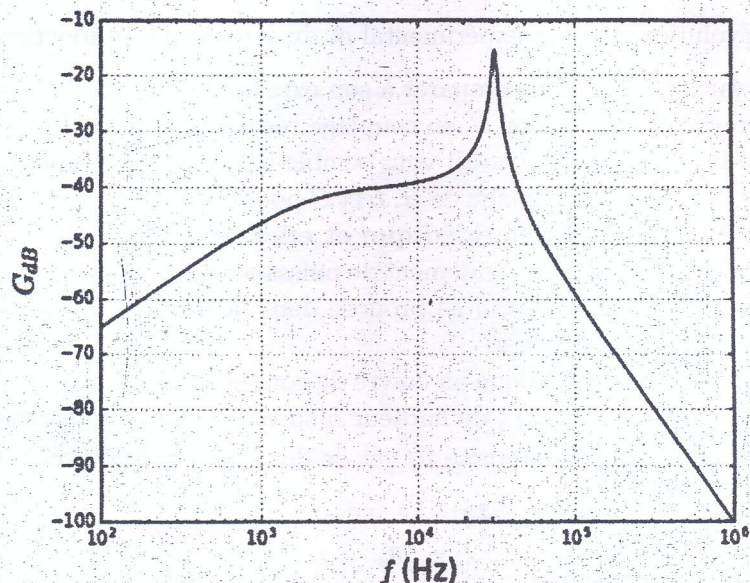


Figure 4 : G_{dB} en fonction de la fréquence

16- Interpréter les comportements aux basses fréquences et hautes fréquences, en comparant les pentes des asymptotes (en dB/décade) mesurées sur le diagramme de Bode et celles déduites de l'expression de \underline{H} .

17- Dans le cadre des hypothèses $k \ll 1$ et $R \ll L\omega$ satisfaites expérimentalement, montrer que la fonction de transfert est approchée par :

$$\underline{H} \approx \frac{k}{1 + j\omega RC - \omega^2 LC} = \frac{H_0}{1 + j\frac{\omega}{Q\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

Identifier les paramètres H_0 , Q et ω_0 en fonction de k , R , L et C .

18- Déterminer l'expression de la fréquence de résonance du système f_r en fonction des paramètres du circuit puis la calculer numériquement. Commenter.

19- La fréquence de résonance dépend-elle de k ? Expliquer en quoi ce résultat est particulièrement intéressant, dans l'objectif d'un fonctionnement à récepteur mobile.

Résultats expérimentaux

20- En analysant le diagramme de Bode en gain expérimental (figure 5), déterminer les valeurs de f_r et k . L'hypothèse $k \ll 1$ est-elle validée ?

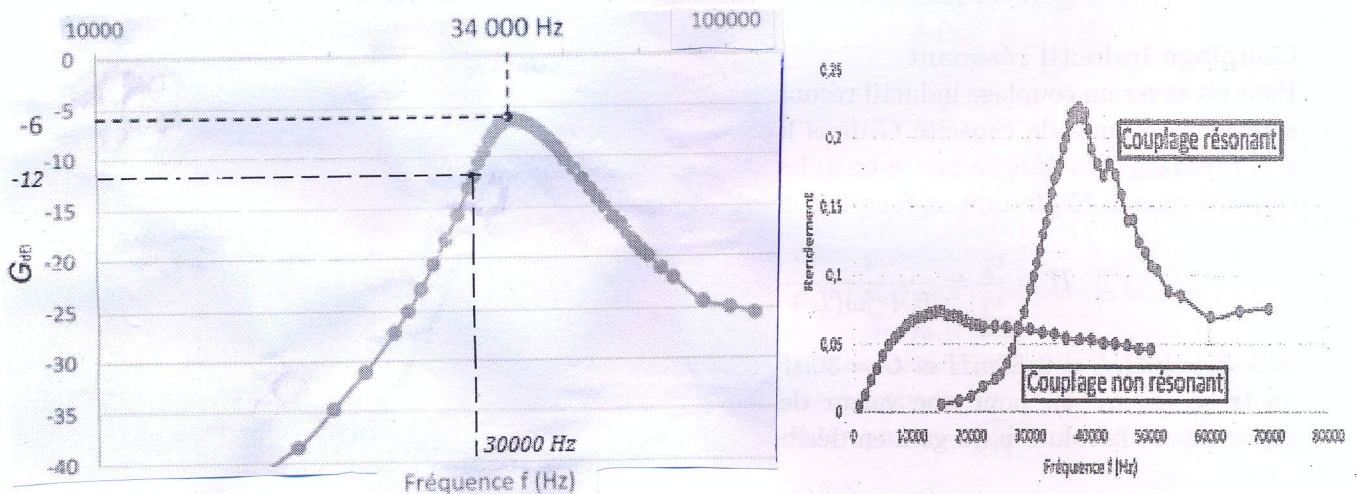


Figure 5 : Evolution du G_{dB} expérimental et du rendement en fonction de la fréquence

21- Estimer la valeur du Q et la comparer à son expression obtenue à la question 17.

22- Estimer le rendement maximal η' en couplage résonant. Commenter.

23- Le choix de la fréquence de travail vous semble-t-il déterminant pour le couplage inductif résonant? Comment choisir les valeurs de R , L et C pour optimiser la transmission de puissance ?

Conducteur ohmique parallélépipédique et effet de peau

Comme montré précédemment, le rendement de puissance est d'autant meilleur que la résistance électrique des circuits est petite. On se propose dans la suite de montrer que cette grandeur dépend de la fréquence d'excitation.

On considère un conducteur ohmique en cuivre de conductivité électrique γ , parallélépipédique, (figure 6) semi-infini suivant (Ox), de hauteur h suivant (Oy) et d'épaisseur p suivant (Oz). Il est parcouru par un courant d'intensité $i(t)$ et de densité $\vec{j} = j(x, t)\vec{e}_y$.

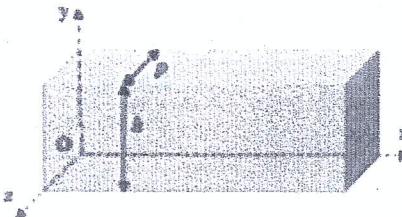


Figure 6 : Conducteur ohmique parallélépipédique

- 24- Citer la loi d'Ohm locale. Donner un ordre de grandeur de γ à la température ambiante.
- 25- Montrer que \vec{j} vérifie l'équation $\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = D \Delta \vec{j}$, on exprimera D en fonction de γ et μ_0 .
- 26- Comment nomme-t-on ce type d'équation? Préciser l'unité de D .
- On admettra dans la suite que $\vec{j}(x, t) = j_0 \exp(-\frac{x}{\delta}) \cos(\omega t - \frac{x}{\delta}) \vec{e}_y$ où $\delta = \sqrt{\frac{2}{\gamma \omega \mu_0}}$.
- 27- Soit $G(u) = -\frac{\delta}{\sqrt{2}} \exp(-\frac{u}{\delta}) \cos(\omega t - \frac{u}{\delta} - \pi/4)$ une primitive de $g(u) = \exp(-\frac{u}{\delta}) \cos(\omega t - \frac{u}{\delta})$. Déterminer l'intensité $i(t)$ ainsi que sa valeur efficace I_{eff} en fonction de p, j_0 et δ .
- 28- Interpréter la dénomination *épaisseur de peau* associée à la grandeur δ .
- 29- Montrer que la puissance moyenne dissipée par effet Joule $\mathcal{P}_j = \frac{j_0^2 p h \delta}{4\gamma}$.
- 30- En supposant I_{eff} fixée, montrer que la résistance R_Ω du conducteur dépend de la fréquence f suivant une loi que l'on déterminera.

*** Fin de l'épreuve ***