Université de Sfax
I.P.E.I.Sfax
2ème année PC-PT

Octobre 2016
Durée: 1h30min

Devoir n° 1
Epreuve de mathématiques

Exercice

On considére $E = C^0([0,1],\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Soit $\varphi \in E$, on définit l'application:

$$\begin{array}{rccl} T_\varphi : & E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & f & \longmapsto & T_\varphi(f) = \displaystyle\int_0^1 f(t)\varphi(t)\,dt. \end{array}$$

1. Montrer que T_φ est une application linéaire sur E.
2. Montrer que $\|.\|_1$ est une norme sur E, où

$$\begin{array}{rccl} \|.\|_1 : & E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & f & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 |f(t)|\,dt. \end{array}$$

3. Montrer que $\forall f \in E,\quad |T_\varphi(f)| \leqslant \|\varphi\|_\infty \|f\|_1$, où $\|\varphi\|_\infty = \sup\limits_{t\in[0,1]} |\varphi(t)|$.
4. En déduire que T_φ est continue sur $(E, \|.\|_1)$.

PROBLEME

Première partie:

Dans cette partie, on se propose de calculer la valeur de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$.

1. Pour tout réel $x \geqslant 1$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{\sin t}{t}\,dt$.
   (a) Montrer que $\forall x \geqslant 1,\quad F(x) = \cos 1 - \dfrac{\cos x}{x} - \displaystyle\int_1^x \frac{\cos t}{t^2}\,dt$.
   (b) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\,dt$ est convergente.
   (c) En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ existe dans $\mathbb{R}$.
   (d) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$ est convergente.
2. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose $J_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\,dt$.
   (a) Justifier l'existence de la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (b) Montrer que la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et donner sa valeur.
   (Indication: $\sin a - \sin b = 2\sin(\frac{a-b}{2})\cos(\frac{a+b}{2})$).

3. On définit l'application φ sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ par $\varphi(t) = \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{\sin t}$.
Montrer que φ se prolonge en une fonction continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
On admet que la fonction φ se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ qu'on notera encore φ.

4. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)t}{t}\, dt$.

   a) Montrer que $I_n - J_n = \dfrac{\varphi(0)}{2n+1} + \dfrac{1}{2n+1} \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi'(t) \cos(2n+1)t\, dt$.

   b) Montrer que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} I_n = \frac{\pi}{2}$.

   c) Montrer que $I_n = F((2n+1)\frac{\pi}{2}) + \displaystyle\int_0^1 \frac{\sin t}{t}\, dt$.

5. En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}$.

Deuxième partie:

Dans cette partie, on se propose de montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$ n'est pas absolument convergente.

1. Montrer que $\forall t > 0, \quad 0 \leqslant \dfrac{\sin^2 t}{t} \leqslant \dfrac{|\sin t|}{t}$.

2. Pour tout réel $x \geqslant 1$, on pose $G(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{\sin^2 t}{t}\, dt$.

   (a) Montrer que $G(x) = \dfrac{1}{2} \ln x - \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_1^x \frac{\cos 2t}{t}\, dt$.

   (b) Montrer que $\displaystyle\int_1^x \frac{\cos 2t}{t}\, dt = \frac{\sin 2x}{2x} - \frac{\sin 2}{2} + \int_1^x \frac{\sin 2t}{2t^2}\, dt$.

   (c) Montrer que l'application $t \longmapsto \dfrac{\sin 2t}{2t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

   (d) Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2t}{t}\, dt$ est convergente.

   (e) En déduire que l'application $t \longmapsto \dfrac{\sin^2 t}{t}$ est non intégrable sur $[1, +\infty[$.

   (f) Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$ n'est pas absolument convergente.

3. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin t}{t}\, dt$ est absolument convergente.

4. En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$ n'est pas absolument convergente.

BON TRAVAIL