Institut Préparatoire aux Etudes d'Ingénieurs de Sfax	**Année Universitaire : 2022/2023** **Classe Préparatoire PC2** **DEVOIR SURVEILLE (Semestre 2)** Matière : Physique Date : Mercredi 22 Février 2023 Durée : 2 Heures Nombre de pages : 04

Problème I : Physique des ondes (Propagation d'ondes acoustiques dans un tuyau)

On supposera que les parois des différents tuyaux, qui interviennent tout au long de cette partie, n'exercent aucun frottement sur le (ou les) fluide(s). On néglige, de plus, l'action de la pesanteur.

I. Propagation d'une onde acoustique dans un tuyau de section constante contenant un fluide unique

Un tuyau cylindrique de section constante S, d'axe $(x'x)$, contient un fluide qui, au repos, est à la pression P_0, à la température T_0 ; sa masse volumique est ρ_0 (Fig. 1).

On considère une tranche de fluide qui, au repos, est située entre les abscisses x et $x+dx$. Le passage de l'onde acoustique s'accompagne d'un déplacement d'ensemble des molécules contenues dans le plan d'abscisse x : soit $\xi(x,t)$ ce déplacement à l'instant t ; ainsi la tranche de fluide considérée se trouve à l'instant t entre les plans $x+\xi(x,t)$ et $x+dx+\xi(x+dx,t)$. On notera de façon comparable :

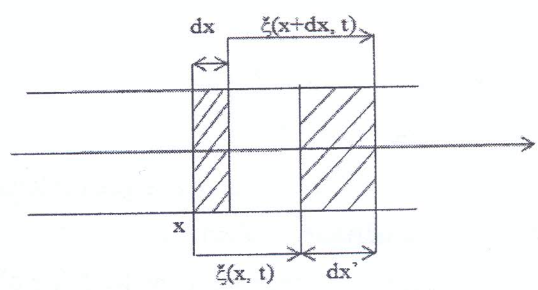

Fig. 1 : Le tuyau sonore

* $v(x,t)$, la vitesse de déplacement de la section d'abscisse x à l'instant t ;

* $p(x,t)$, la surpression liée au passage de l'onde en x à t ; ainsi la pression s'écrira $P(x,t)=P_0+p(x,t)$;

* $\rho(x,t)$, la masse volumique du fluide à l'abscisse x à l'instant t ;

On se limitera aux mouvements de faibles amplitudes ; ainsi le déplacement $\xi(x,t)$, la surpression $p(x,t)$, la variation de la masse volumique $\rho(x,t)-\rho_0$ et leurs dérivées peuvent être considérés comme des infiniment petits du premier ordre. On négligera dans la suite tous les infiniment petits d'ordre supérieur ou égal à deux.

1) Quelle est, à l'instant t, la nouvelle épaisseur dx' de la tranche considérée ? Exprimer, au premier ordre cette épaisseur en fonction de dx et de l'une des dérivées de $\xi(x,t)$.

2) Montrer que la variation relative de volume de la tranche est : $\dfrac{\delta V}{V} = \dfrac{\partial \xi(x,t)}{\partial x}$ (1)

3) L'évolution de la tranche de fluide considérée est supposée adiabatique.
a) Justifier brièvement cette hypothèse.

b) Le coefficient de compressibilité adiabatique d'un fluide est défini par : $\chi_S = -\dfrac{1}{V}\left(\dfrac{\partial V}{\partial P}\right)_S$ (2)

Montrer que l'on peut écrire : $p(x,t) = -\dfrac{1}{\chi_S}\dfrac{\partial \xi(x,t)}{\partial x}$ (3)

4) Montrer que la résultante $d\vec{F}_p$ des forces de pression qui agissent sur la tranche considérée, mesurée suivant l'axe (Ox), à l'instant t, est donnée par : $d\vec{F}_p = -S\,\dfrac{\partial p}{\partial x}\,dx\,\vec{u}_x$ (4)

5) En raisonnant sur la tranche de fluide considérée, établir que : $\rho_0 \dfrac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial t^2} = -\dfrac{\partial p(x,t)}{\partial x}$ (5)

6) **a)** En utilisant les résultats des questions **3)** et **5)**, déterminer l'équation à laquelle satisfait $\underline{\xi}(x,t)$.
b) Quelle est la solution générale de cette équation ?
c) Montrer que l'on peut interpréter chacun des deux termes intervenant dans la réponse de la question **b)** comme des ondes progressives, se propageant à la vitesse du son c. Donner l'expression de c.

d) Ces ondes sont-elles des ondes planes ?

7) Montrer que les grandeurs $p(x,t)$ et $v(x,t)$ satisfont à la même équation de propagation que $\xi(x,t)$.

8) Le fluide est l'air, considéré comme un gaz parfait :

* de $\gamma = \dfrac{c_p}{c_v} = 1{,}4$ (rapport des capacités calorifiques molaires à pression et à volume constant) ;

* de masse molaire $M = 29\,g\,mol^{-1}$;

* de température $T_0 = 293\,K$.

$R = 8{,}32\,J\,mol^{-1}K^{-1}$ (Constante des gaz parfaits). Etablir l'expression de c en fonction de γ, R, T_0 et M.
Application numérique : Calculer c.

9) On considère la propagation dans le fluide d'une onde plane progressive sinusoïdale de pulsation ω qu'on représente en notation complexe par : $\underline{\xi}_1(x,t) = A_1 exp\, i(\omega t - kx)$ (6)

Où A_1 est une constante et k un réel positif (module du vecteur d'onde).

On supposera dans cette question que le tuyau est infini et donc qu'il n'a aucune onde réfléchie se superposant à $\underline{\xi}_1(x,t)$.

a) Dans quel sens se propage cette onde ? Déterminer l'expression de k en fonction de ω et c, et calculer sa valeur pour l'air avec une fréquence de l'onde de $f = 1\,kHz$.

b) Exprimer alors $\underline{p}_1(x,t)$ et $\underline{v}_1(x,t)$, représentations complexes de la surpression et de la vitesse.

c) On appelle impédance acoustique Z, la grandeur caractéristique du milieu définie par : $Z = \rho_0 c$ (7). Montrer que le rapport $\dfrac{\underline{p}_1(x,t)}{\underline{v}_1(x,t)}$ s'exprime simplement en fonction de Z.

10) Soit l'onde $\underline{\xi}_1'(x,t) = A_1' exp\, i(\omega t + kx)$, $\underline{p}_1'(x,t)$ et $\underline{v}_1'(x,t)$ étant les ondes de surpression et de vitesse associées. Exprimer le rapport $\dfrac{\underline{p}_1'(x,t)}{\underline{v}_1'(x,t)}$ en fonction de l'impédance acoustique Z du milieu.

II. Réflexion et transmission dans un tuyau de section constante contenant deux fluides

Le tuyau est maintenant séparé en deux régions (Fig. 2).

-La région (1) $(x<0)$ contient un fluide (1) d'impédance acoustique $Z_1 = c_1 \rho_1$. La vitesse du son dans ce fluide est c_1.

-La région (2) $(x>0)$ contient un fluide (2) d'impédance acoustique $Z_2 = c_2 \rho_2$. La vitesse du son dans ce fluide est c_2.

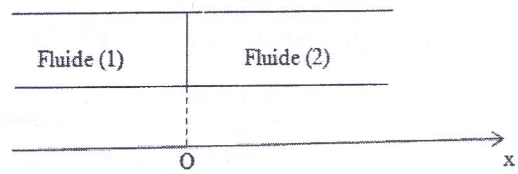

Fig. 2 : Le tuyau contenant deux fluides

La surface de contact entre les deux fluides est donc le plan perpendiculaire en O à l'axe (x'x).

Une onde acoustique plane sinusoïdale se propage du milieu (1) vers le milieu (2) et est décrite en notation complexe par : $\underline{p}_1(x,t) = p_{01}\, exp\, i(\omega t - k_1 x)$ (Onde de surpression d'amplitude p_{01}). (8)

A l'interface entre les deux milieux, cette onde incidente donne naissance à une onde réfléchie dans le milieu (1), notée $\underline{p}_1'$ et à une onde transmise dans le milieu (2), notée $\underline{p}_2$.

On admettra que les ondes réfléchie et transmise sont des ondes planes sinusoïdales d'amplitudes respectives p_{01}' et p_{02}.

On précise que dans le plan $x=0$, il y a continuité de la pression (donc de la surpression p) et du débit volumique D_v (c'est-à-dire ici continuité de la grandeur v car la section S du tuyau est constante).

11) Montrer que les ondes réfléchie et transmise sont de même pulsation que l'onde incidente.

12) Exprimer $\underline{p}_1'$ et $\underline{p}_2$ en termes de p_{01}', p_{02}, k_1, k_2, ω, t et x.

13) En exploitant les conditions de continuité, exprimer en fonction de Z_1 et Z_2 les coefficients de réflexion r_{12} et de transmission t_{12} relatifs aux amplitudes des surpressions.

Ces coefficients sont définis par : $r_{12} = \dfrac{p_{01}'}{p_{01}}$ et $t_{12} = \dfrac{p_{02}}{p_{01}}$ (9)

14) Coefficients de réflexion et de transmission en puissance.

a) Déterminer les coefficients de réflexion R et de transmission T, relatifs aux puissances acoustiques.

b) Quelle remarque peut-on faire au sujet de R et T ?

15) Application numérique : Le milieu (1) est l'air, le milieu (2) est l'eau. On prendra respectivement $Z_1 = 4{,}50\ 10^2\ USI$ et $Z_2 = 1{,}40\ 10^6\ USI$. Déterminer numériquement R et T. Commenter.

Problème II : Mécanique des fluides

Dans ce problème on étudie l'écoulement laminaire d'un fluide newtonien incompressible de masse volumique ρ et de viscosité dynamique η dans le repère galiléen $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, $(O, \vec{e}_z)$ est la direction verticale ascendante. Le champ de pesanteur est uniforme, de norme g : $\vec{g} = -g\,\vec{e}_z$. Enfin x, y, z, t sont les coordonnées eulériennes des particules de fluide.

Le fluide s'écoule dans une conduite rectangulaire de section ab, considéré illimité selon la direction $\vec{e}_x$ (Fig. 3). Les parois verticales sont lisses contrairement aux parois horizontales. La paroi horizontale supérieure peut être en mouvement de translation selon $\vec{e}_x$. La température est uniforme sur l'ensemble du système. On ne considère que les écoulements de vitesse : $\vec{v} = v(z,t)\,\vec{e}_x$ dont le champ de pression est : $p = p(x,z,t)$.

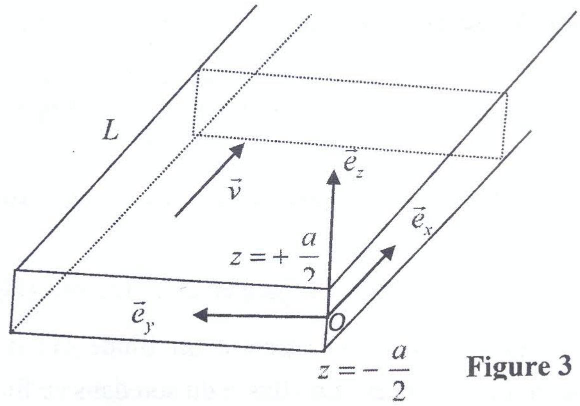

Figure 3

1) Commenter les champs de vitesses et de pression proposés (leur dépendance des coordonnées eulériennes, orientation de $\vec{v}$). Préciser les conditions que doit vérifier la vitesse sur les parois horizontales inférieure et supérieure. Qu'en est-il sur les parois verticales ? Donner la valeur de l'accélération particulaire convective.

2) En faisant un bilan de quantité de mouvement relatif à un parallélépipède élémentaire de fluide, de côtés dx, dy, dz, établir les équations (1) et (2) traduisant la projection de l'équation vectorielle obtenue respectivement suivant x et z.

$$\rho\,\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta\,\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \quad (1) \qquad\qquad -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g = 0 \quad (2)$$

Dans toute la suite de cette partie, l'écoulement est stationnaire.

3) Justifier que la pression dépend linéairement de x, pour z donné. On note :

$$p_1 = p(x=0, z=0)\ ,\ p_2 = p(x=L, z=0) \quad et \quad \Delta p = p_1 - p_2$$

Déterminer complètement le champ de pression $p(x,z)$. Expliquer la répartition de pression dans les plans d'abscisse x.

4) Le fluide s'écoulant dans le sens de $\vec{e}_x$, quel doit être le signe de Δp ?

5) En utilisant les conditions aux limites au niveau des parois, établir l'expression de la vitesse $v(z)$ en fonction de z et des données $\Delta p, L, a$ et η. Exprimer sa valeur maximale v_M et sa valeur moyenne v_m. Représenter le profil du champ de vitesses.

6) Calculer le débit massique D_m à travers la section ab, en fonction de la valeur moyenne de la vitesse.

7) Par intégration des densités surfaciques de force de viscosité, calculer la force $\vec{F}$ qu'il faut exercer sur la paroi horizontale supérieure, relativement au rectangle d'aire $S = Lb$ (L selon x et b selon y) pour la maintenir immobile. On exprimera $\vec{F}$ en fonction de Δp et des données géométriques. Retrouver ce résultat en utilisant la définition de la force de pression.