UNIVERSITÉ DE SFAX **Année universitaire : 2019/2020**

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Institut Préparatoire aux Études d'Ingénieurs de Sfax

Devoir d'Algèbre - Semestre N°2
Sections : M.P.2

Durée : 2h **Date : 29 Juillet 2020** **Nbre de pages : 2**

Exercice 1

Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$, ${}^tA$ désigne la matrice transposée de A ; si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $sp_{\mathbb{C}}(A)$ représente l'ensemble des valeurs propres de A appartenant à $\mathbb{C}$, $tr(A)$ sa trace et $rg(A)$ son rang.

Soient A et B deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$; on considère l'application , notée $\Phi_{A,B}$, suivante :

$$\Phi_{A,B} : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ X & \longmapsto & AX + XB \end{array}$$

1. Soit $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$; montrer que $sp_{\mathbb{C}}(C) = sp_{\mathbb{C}}({}^tC)$.
2. Montrer que l'application $\Phi_{A,B}$ est linéaire.
3. Soient $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$(resp. $W \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$) un vecteur propre de A (resp. ${}^tB$) associé à la valeur propre a (resp. b).
   (a) Montrer que $V{}^tW$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1.
   (b) Montrer que la matrice $V{}^tW$ est un vecteur propre de $\Phi_{A,B}$; à quelle valeur propre est-il associé ?
4. Soit λ une valeur propre de $\Phi_{A,B}$ et $Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ un vecteur propre associé.
   (a) Montrer que pour tout entier naturel k, $A^kY = Y(\lambda I_n - B)^k$.
   (b) En déduire que pour tout polynôme P, à coefficients dans $\mathbb{C}$, $P(A)Y = YP(\lambda I_n - B)$.
   (c) On note $\chi_A = \prod_{\mu \in sp_{\mathbb{C}}(A)} (X - \mu)^{\beta_\mu}$ le polynôme caractéristique de A.
      i. Montrer que $Y\chi_A(\lambda I_n - B) = 0$ et en déduire que $\chi_A(\lambda I_n - B)$ n'est pas inversible.
      ii. En déduire qu'il existe $a \in sp_{\mathbb{C}}(A)$ tel que la matrice $(\lambda - a)I_n - B$ ne soit pas inversible.
5. Conclure que $sp_{\mathbb{C}}(\Phi_{A,B}) = sp_{\mathbb{C}}(A) + sp_{\mathbb{C}}(B)$.

Exercice 2

Soit n un entier ≥ 2.

- $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est muni de son produit scalaire canonique $\langle\ ,\ \rangle$ et sa norme euclidienne $\|\ \|$.
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que
  - A est une matrice normale si : $A\,{}^tA = {}^tAA$.
  - A est une matrice orthogonale si : ${}^tAA = I_n$.
- On note $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. (a) Montrer que si $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ alors $det(P) \in \{-1, 1\}$.
   On note $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R}) = \{P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $\det(P) = 1\}$.
   (b) Montrer que l'application $f : \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \{-1, 1\}$; $P \longmapsto \det(P)$ est continue et surjective.
   (c) Déduire que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs.
2. Dans cette question, on prend $n = 2$.
   (a) Montrer que $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R}) = \{R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \theta \in \mathbb{R}\}$.
   (b) Montrer que l'application $R : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$; $\theta \longmapsto R(\theta)$ est continue et surjective.
   (c) Déduire que $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.
   (**indication :** utiliser la fonction φ définie sur $[0, 1]$ par $\varphi(t) = R(t\theta)$).
3. Soient M et N deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   Montrer que : $M = N \Longleftrightarrow {}^tXMY = {}^tXNY, \quad \forall X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$
4. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   Montrer que A est normale si et seulement si $\|AX\| = \|\,{}^tAX\|$, $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
5. Soit A une matrice normale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   Montrer que si P est une matrice orthogonale alors ${}^tPAP$ est une matrice normale.
6. Montrer que si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases orthonormée d'un espace euclidien, alors la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est orthogonale.
7. Pour tout $(M, N) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$, on pose $\psi(M, N) = tr(\,{}^tMN)$.
   (a) Montrer que ψ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   On note N la norme euclidienne associée au produit scalaire ψ. ($N(M) = \sqrt{tr(\,{}^tMM)}$, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$).
   (b) Soit $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), N(PM) = N(MP) = N(M)$.
8. Montrer que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un compact.