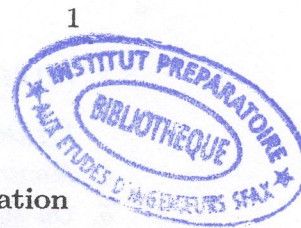


INSTITUT PREPARATOIRE
AUX ETUDES D'INGENIEURS
DE SFAX

Département de la Préparation
Mathématiques Physique
Section MP2



Devoir de contrôle d'Algèbre MP2

Durée : 1h30mn Date : 18-10-2016 Nb pages : 2

Une grande importance sera attachée à la rigueur du raisonnement, à la clarté et au soin de la présentation.

Problème La partie III est indépendante des autres parties.

Dans les deux premières parties, on considère (G, \cdot) un groupe fini d'ordre $n \geq 2$ et d'élément neutre e . Si $a \in G$, l'ensemble $\langle a \rangle = \{a^k; k \in \mathbb{Z}\}$ désigne le sous-groupe engendré par a . On rappelle le théorème de Lagrange : L'ordre de tout sous-groupe H de G divise l'ordre de G .

Partie I

1. Soit $a \in G$ d'ordre p . Montrer que $\langle a \rangle = \{a^k; 0 \leq k \leq p-1\}$.
2. (a) Montrer que le groupe G est cyclique si, et seulement si, il existe $x \in G$ d'ordre n .
(b) Dédurre que si n est premier, alors G est cyclique.
3. Le groupe de Klein $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$ est-il cyclique ?
4. On suppose que le groupe G est abélien. Soient x et y deux éléments de G d'ordres respectifs p et q .
(a) Montrer que si $p \wedge q = 1$, alors $x.y$ est d'ordre pq .
(b) Montrer que si $\langle x \rangle \cap \langle y \rangle = \{e\}$, alors $x.y$ est d'ordre $p \vee q$.

Partie II

On considère l'ensemble $N = \{k \in \mathbb{N}^*; x^k = e, \forall x \in G\}$.

1. (a) Montrer que, $\forall x \in G, x^n = e$.
(b) Dédurre que l'ensemble N admet un plus petit élément $m \leq n$.
2. (a) Déterminer m lorsque $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. A-t-on $m = n$?
(b) On suppose uniquement dans cette question que G est le groupe symétrique S_3 . Déterminer les ordres de la transposition $\tau = (1, 2)$ et du cycle $\sigma = (1, 2, 3)$. En déduire que $m = 6$.

3. (a) Montrer que si $k \in N$, alors m divise k .
 (b) Dédurre que m divise n .
4. Montrer que $m = \text{ppcm}\{o(x), x \in G\}$ ($o(x)$ désigne l'ordre de x).
5. On suppose que le groupe (G, \cdot) est abélien et que $m = rs$, avec $r > 1$, $s > 1$ et $r \wedge s = 1$. On pose $R = \{x \in G; x^r = e\}$ et $S = \{x \in G; x^s = e\}$. On définit $RS = \{x.y; (x, y) \in R \times S\}$.
- (a) Montrer que R , S et RS sont des sous-groupes de G .
 (b) Montrer que $R \cap S = \{e\}$ et que $RS = G$.
 (c) Montrer que l'application

$$f : R \times S \longrightarrow G$$

$$(x, y) \longmapsto x.y$$

est un isomorphisme de groupes.

- (d) Montrer que $R \neq \{e\}$ et que $S \neq \{e\}$.

Partie III

Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau commutatif. Un idéal I de A est dit :

- premier si $I \neq A$ et $\left[\forall (a, b) \in A^2 \text{ si } a.b \in I, \text{ alors } a \in I \text{ ou } b \in I \right]$;
- principal s'il existe $a \in A$ tel que $I = (a) = aA$;
- maximal si $I \neq A$ et, $\forall J$ idéal de A tel que $I \subset J$, alors $(J = I \text{ ou } J = A)$.

On rappelle que l'anneau A est dit principal si A est intègre et tout idéal de A est principal.

1. Soit I un idéal de A tel que $I \neq A$.

- (a) Montrer que I est maximal si, et seulement si,

$$\forall a \in A \setminus I, I + (a) = A.$$

- (b) En déduire que tout idéal maximal est premier.

2. Montrer que si A est un anneau principal, alors les idéaux premiers non nuls sont les idéaux maximaux.

3. (a) Montrer que les idéaux de \mathbb{Z} sont les $n\mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$.

- (b) Soit n un entier ≥ 2 . Montrer que l'idéal $n\mathbb{Z}$ est premier si, et seulement si n est premier.

- (c) Déterminer les idéaux maximaux de \mathbb{Z} .

4. On suppose que $A = \mathbb{K}[X]$. Déterminer les idéaux maximaux de A .