**INSTITUT PREPARATOIRE
AUX ETUDES D'INGENIEURS
DE SFAX**

**Département de la Préparation
Mathématiques Physique
Section MP2**

Devoir de contrôle d'Algèbre MP2

Durée : 1h30mn   Date : 18-10-2016   Nb pages : 2

Une grande importance sera attachée à la rigueur du raisonnement, à la clarté et au soin de la présentation.

Problème *La partie III est indépendante des autres parties.*

Dans les deux premières parties, on consière $(G,.)$ un groupe fini d'ordre $n \geq 2$ et d'élément neutre e. Si $a \in G$, l'ensemble $<a>=\{a^k;\ k \in \mathbb{Z}\}$ désigne le sous-groupe engendré par a. On rappelle le théorème de Lagrange : L'ordre de tout sous-groupe H de G divise l'ordre de G.

Partie I

1. *Soit $a \in G$ d'ordre p. Montrer que $<a>=\{x^k;\ 0 \leq k \leq p-1\}$.*
2. *(a) Montrer que le groupe G est cyclique si, et seulement si, il existe $x \in G$ d'ordre n.*

   (b) Déduire que si n est premier, alors G est cyclique.
3. *Le groupe de Klein $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$ est-il cyclique ?*
4. *On suppose que le groupe G est abélien. Soient x et y deux éléments de G d'ordres respectifs p et q.*

   (a) Montrer que si $p \wedge q = 1$, alors $x.y$ est d'ordre pq.

   (b) Montrer que si $<x> \cap <y>=\{e\}$, alors $x.y$ est d'ordre $p \vee q$.

Partie II

On considère l'ensemble $N=\{k \in \mathbb{N}^*;\ x^k=e,\ \forall x \in G\}$.

1. *(a) Montrer que, $\forall x \in G,\ x^n=e$.*

   (b) Déduire que l'ensemble N admet un plus petit élément $m \leq n$.
2. *(a) Déterminer m lorsque $G=\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. A-t-on $m=n$?*

   (b) On suppose uniquement dans cette question que G est le groupe symétrique S_3. Déterminer les ordres de la transposition $\tau=(1,2)$ et du cycle $\sigma=(1,2,3)$. En déduire que $m=6$.

3. (a) Montrer que si $k \in N$, alors m divise k.

   (b) Déduire que m divise n.

4. Montrer que $m = \text{ppcm}\{o(x),\ x \in G\}$ ($o(x)$ désigne l'ordre de x).
5. On suppose que le groupe $(G, .)$ est abélien et que $m = rs$, avec $r > 1$, $s > 1$ et $r \wedge s = 1$. On pose $R = \{x \in G;\ x^r = e\}$ et $S = \{x \in G;\ x^s = e\}$. On définit $RS = \{x.y;\ (x, y) \in R \times S\}$.

   (a) Montrer que R, S et RS sont des sous-groupes de G.

   (b) Montrer que $R \cap S = \{e\}$ et que $RS = G$.

   (c) Montrer que l'application

$$f\ :\ R \times S \longrightarrow G$$
$$(x, y) \longmapsto x.y$$

   est un isomorphisme de groupes.

   (d) Montrer que $R \neq \{e\}$ et que $S \neq \{e\}$.

Partie III

Soit $(A, +, .)$ un anneau commutatif. Un idéal I de A est dit :

- *premier si $I \neq A$ et $\left[\forall (a, b) \in A^2 \text{ si } a.b \in I, \text{ alors } a \in I \text{ ou } b \in I\right]$;*
- *principal s'il existe $a \in A$ tel que $I = (a) = aA$;*
- *maximal si $I \neq A$ et, $\forall J$ idéal de A tel que $I \subset J$, alors ($J = I$ ou $J = A$).*

On rappelle que l'anneau A est dit principal si A est intègre et tout idéal de A est principal.

1. Soit I un idéal de A tel que $I \neq A$.

   (a) Montrer que I est maximal si, et seulement si,

$$\forall a \in A \backslash I,\ I + (a) = A.$$

   (b) En déduire que tout idéal maximal est premier.

2. Montrer que si A est un anneau principal, alors les idéaux premiers non nuls sont les idéaux maximaux.
3. (a) Montrer que les idéaux de $\mathbb{Z}$ sont les $n\mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$.

   (b) Soit n un entier ≥ 2. Montrer que l'idéal $n\mathbb{Z}$ est premier si, et seulement si n est premier.

   (c) Déterminer les idéaux maximaux de $\mathbb{Z}$.

4. On suppose que $A = \mathbb{K}[X]$. Déterminer les idéaux maximaux de A.