

Corrigé du devoir de contrôle n°1

OCTOBRE 2016

EXERCICE 1

1- Dans le cas de petites oscillations ($|\alpha| \ll 1$), l'équation devient, en linéarisant le sinus :

$$\ddot{\alpha} + \omega_0^2 \alpha = 0 \quad \text{O.H.libre (0.5 pt)}$$

La période des oscillations est donnée par $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{J_z/mgl_G}$ (0.5)

2- Pour $\alpha < -\theta_B$, le flux magnétique est nul, l'équation précédente reste valable, on a des oscillations libres.

Pour $-\theta_B < \alpha < -\theta_S$, le flux magnétique à travers la spire évolue au cours du temps. Il apparaît donc une force électromotrice, d'après la loi de Faraday, et un courant électrique. En conséquence, des forces de Laplace vont s'exercer, et on constate que les forces qui s'exercent sur la partie droite de la spire ont un moment non nul par rapport à l'axe Oz. D'après la loi de Lenz, le moment de ces forces de Laplace aura tendance à freiner le mouvement.

Pour $-\theta_B < \alpha < \theta_B$, le flux magnétique à travers la spire n'évolue pas, on retombe transitoirement sur des oscillations libres.

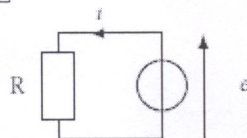
Si la vitesse initiale permet d'atteindre $\alpha > \theta_B$, alors le flux magnétique varie à nouveau à la sortie de la zone de champ magnétique. On aura à nouveau une phase de freinage etc. (1.5)

3- On oriente la spire dans le sens trigonométrique. L'aire de la partie dans le champ magnétique vaut $S = \int_0^l dr \int_{-\theta_B}^\alpha l d\theta = \frac{1}{2} l^2 (\alpha - (-\theta_B)) = \frac{1}{2} l^2 (\theta_B + \alpha)$, et le flux magnétique s'écrit donc

$$\varphi = \frac{1}{2} B_0 l^2 (\alpha + \theta_B) \quad (1)$$

b- La f.é.m. induite vaut $e = -\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{1}{2} B_0 l^2 \dot{\alpha}$ et l'intensité est donnée par $e = Ri$,

d'où $i = -\frac{1}{2R} B_0 l^2 \dot{\alpha}$ (0.5+0.5)



4-a- La force de Laplace élémentaire est $i dr \vec{e}_r \wedge B_0 \vec{e}_z = -idr B_0 \vec{e}_\theta$, uniforme.

$$\vec{F}_{Lap} = \int_l^0 -idr B_0 \vec{e}_\theta = +il B_0 \vec{e}_\theta$$

Le moment résultant sur la partie radiale est donc le même que si la résultante s'appliquait au centre K du rayon, soit : $M_{Lap/z} = \left(\frac{1}{2} \overrightarrow{OK} \wedge \vec{F}_{Lap} \right) \vec{e}_z = \frac{1}{2} i B_0 l^2 = -\frac{1}{4R} B_0^2 l^4 \dot{\alpha} \quad (1)$

Remarques : On ne peut pas ici utiliser la formule $M_{Lap/z} = (\vec{m} \wedge \vec{B}_0) \vec{e}_z$ car le circuit électrique ne constitue pas un dipôle puisqu'il n'est pas tout entier plongé dans le champ magnétique. De plus, la partie ortho radiale de la spire qui est soumise au champ magnétique ne donne pas de contribution au moment selon Oz.

b- Le théorème du moment cinétique en projection selon Oz devient donc :

$$J_z \ddot{\alpha} = -mgl_G \sin \alpha + \frac{1}{2} i B_0 l^2$$

Dans le cas de petites oscillations ($|\alpha| \ll 1$), et en introduisant une constante de temps τ :

$$\ddot{\alpha} + \frac{1}{\tau} \dot{\alpha} + \omega_0^2 \alpha = 0 \text{ avec } \tau = \frac{4R J_z}{(B_0 l^2)^2} \text{ inversement proportionnel à } B^2 \text{ (1 + 0.5)}$$

c- C'est une équation différentielle décrivant un oscillateur harmonique amorti de facteur de qualité $Q = \tau \omega_0 = \frac{2\pi\tau}{T_0}$. Pour obtenir un freinage optimal il faut se placer dans le régime critique.

$$\text{Soit } Q = 0.5 = \frac{4R}{(B_0 l^2)^2} \sqrt{m J_z g l_G} \cdot \text{D'où } B_{0,opt} = \mp \left(\frac{8R}{l^4} \sqrt{m J_z g l_G} \right)^{1/2} \text{ (0.5)}$$

d- Les freins à induction Telma, communément appelés ralentisseurs électriques ou électromagnétiques, permettent d'obtenir un freinage d'endurance utilisés dans les véhicules à poids lourd, soulageant ainsi les systèmes de freinage classiques. (0.5)

<https://www.youtube.com/watch?v=91FoDnEK95o>

5-a- Equation électrique : $e = Ri$

$$\text{Equation mécanique : } J_z \ddot{\alpha} = -mgl_G \sin \alpha + \frac{1}{2} i B_0 l^2$$

En multipliant l'équation électrique par i et l'équation mécanique par $\dot{\alpha}$ puis en remplaçant on aura :

$$P_{Lap} = M_{Lapz} \dot{\alpha} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} J_z \dot{\alpha}^2 - mgl_G \cos(\alpha) \right) = \frac{d}{dt} (E_c + E_{pp}) = \frac{dE_{mec}}{dt} = -e \cdot i \text{ (1)}$$

b- On vérifie le bilan de puissance $P_{Lap} + e \cdot i = 0$

Dans ce cas $P_{Lap} < 0$: il s'agit d'un *fonctionnement alternateur* l'induction permet de convertir l'énergie mécanique de la spire en une énergie électrique que sera après dissipée par effet Joule. (1)

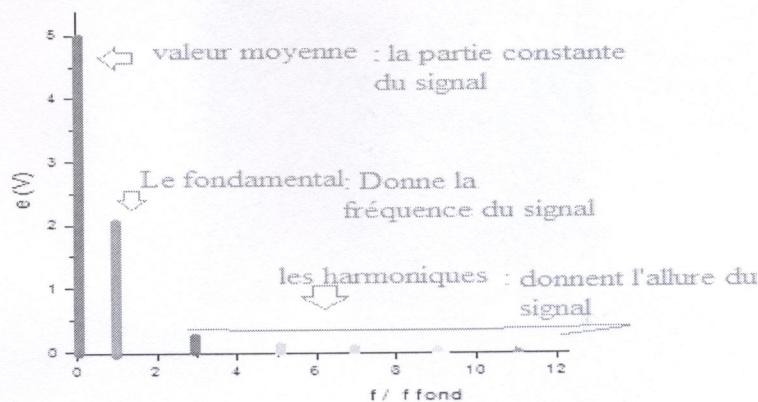
EXERCICE 2

$$1-a - \underline{H_{an}}(j\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{Z_R}{Z_C + Z_R} = \frac{R}{R + 1/jC\omega} = \frac{j\omega_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}} \text{ avec } \omega_0 = 1/RC \text{ (0.5)}$$

$$b- \text{On a } (1 + j\frac{\omega}{\omega_0})\underline{s} = j\frac{\omega}{\omega_0}\underline{e} \text{ et comme } j\omega = \frac{d}{dt}. \text{ Il vient alors } \tau \frac{ds}{dt} + s = \tau \frac{de}{dt} \text{ (0.5)}$$

$$c- G_{an}(\omega) = |\underline{H_{an}}(j\omega)| = \frac{\tau \omega}{(1 + \omega^2 \tau^2)^{1/2}} \text{ (0.5)} \text{ et } \varphi = \arg(\underline{H_{an}}(j\omega)) = \frac{\pi}{2} - \arctg(\tau\omega) \text{ (0.5)}$$

2-a-(0.75)



b- De façon générale, à la sortie du filtre l'harmonique n est de la forme :

$$\frac{4E}{\pi^2 n^2} G_{an}(2.n.\pi.f) \cos(2.\pi.n.f.t + \varphi(2.n.\pi.f))$$

Pour $f = 0 : G_{an}(0) = 0$.

Pour le fondamental : $G_{an}(2\pi f) = \frac{10}{(1+100)^{1/2}} = 0.995 \approx 1, \varphi(2\pi f) = \frac{\pi}{2} - \arctg(10) = 0.1 \text{ rd}$

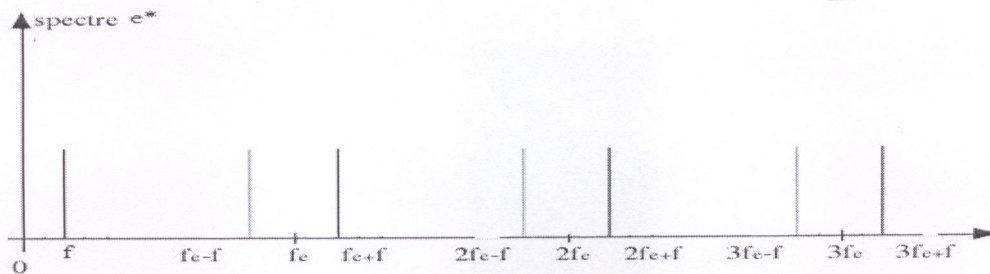
Pour l'harmonique 3 : $G_{an}(6\pi f) = \frac{30}{(1+900)^{1/2}} = 0.999 \approx 1, \varphi(2\pi f) = \frac{\pi}{2} - \arctg(30) = 0.03 \text{ rd}$

Pour l'harmonique n : $G_{an}(2.n.\pi.f) = \frac{10.n}{(1+10.n)^{1/2}} \approx 1$ et $\varphi(2.n.\pi.f) = \frac{\pi}{2} - \arctg(n.10) \approx 0 \text{ rd}$

Alors $s(t) \cong \sum_{n \text{ impairs}}^{\infty} \frac{4E}{\pi^2 n^2} \cos(n\omega t)$ (0.75)

c- L'action du filtre sur $e(t)$ est l'élimination de la partie continue (off set). (0.5)

3-a- (0.5)



b- On conçoit qu'un filtre passe-bas de fréquence de coupure inférieure ou égale à $f_e/2$ permet si il est assez sélectif (ordre élevé) de ne conserver que le signal information. (0.5)

c- Pour cela, il suffit que la borne supérieure du spectre soit inférieure ou égale à $f_e/2$; d'où le **théorème de Shannon**: la fréquence d'échantillonnage doit être au moins égale à 2 fois la plus grande fréquence du spectre du signal à échantillonner. (0.5)

4-a- On pose $e(t) = A \cos(2\pi f t)$ et on cherche $e'(t)$ sous la forme $e'(t) = A \cos(2\pi f' t + \beta)$. Les signaux étant égaux en $t = 0$ on a $\beta = 0$.

Comme les signaux doivent coïncider pour chaque instant $t = kT_e$:

$$A \cos(2\pi f k T_e) = A \cos(2\pi f' k T_e) \text{ d'où}$$

$$2 \sin(k \pi (f - f') T_e) \sin(k \pi (f + f') T_e) = 0$$

$$k \pi (f - f') T_e = p \pi \text{ ou } k \pi (f + f') T_e = p \pi ; p \in \mathbb{Z}$$

donc $f' = \frac{p}{k} f_e - f \text{ ou } f' = -\frac{p}{k} f_e + f ; \frac{p}{k} \text{ entier}$ (0.5)

Ainsi, par exemple, pour $f_e = 1000 \text{ Hz}$:

- $f = 900 \text{ Hz}$ sera perçu comme un signal de $f' = 100 \text{ Hz}$
- $f = 1100 \text{ Hz}$ sera perçu comme un signal de $f' = 100 \text{ Hz}$
- $f = 1900 \text{ Hz}$ sera perçu comme un signal de $f' = 900 \text{ Hz}$ soit $f' = 100 \text{ Hz}$
- $f = 2100 \text{ Hz}$ sera perçu comme un signal de $f' = 1100 \text{ Hz}$ soit $f' = 100 \text{ Hz}$
- etc...

-b- Ainsi toutes les fréquences ne vérifiant pas la condition de Nyquist-Shannon se retrouvent dans l'intervalle $[0; f_e/2]$. Ce phénomène s'appelle le **repliement du spectre**. Il est responsable de l'apparition de raies dans le spectre du signal échantillonné qui n'existent pas dans le spectre du signal réel. (0.5)

5-a- L'équation $\tau \frac{ds}{dt} + s = \tau de/dt$ devient $\tau \left(\frac{s_{n+1} - s_n}{T_e} \right) + s_n = \tau \left(\frac{e_{n+1} - e_n}{T_e} \right)$ (0.5)

b- $\underline{s_{n+1}} = S \exp(j(n+1)\omega T_e) = \underline{s_n} e^{j\omega T_e}$ et $\underline{e_{n+1}} = E \exp(j(n+1)\omega T_e) = \underline{e_n} e^{j\omega T_e}$.

$$\left(\tau \frac{-1 + e^{j\omega T_e}}{T_e} + 1 \right) \underline{s}_n = \tau \left(\frac{e^{j\omega T_e} - 1}{T_e} \right) \underline{e}_n$$

$$\underline{H}_{num}(j\omega) = \frac{\underline{s}_n}{\underline{e}_n} = \frac{e^{j\omega T_e} - 1}{e^{j\omega T_e} - 1 + T_e} \quad (0.5)$$

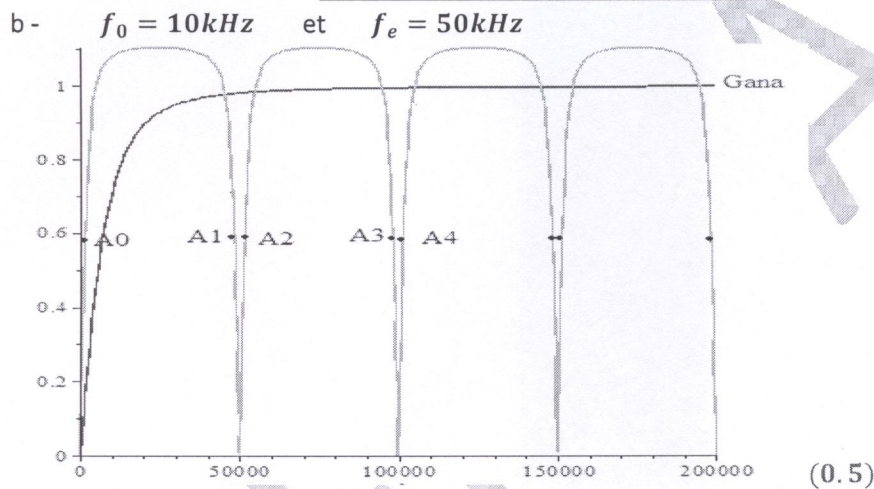
c- Si $T_e \omega \rightarrow 0$ alors $e^{j\omega T_e} \cong 1 + j\omega T_e$ et $\underline{H}_{num}(j\omega) \cong \frac{j\tau\omega}{1 + j\tau\omega} = \underline{H}_{an}(j\omega)$.

→ L'effet de la discrétisation est négligeable (0.5)

6-a- $G_{num}(\omega) = |\underline{H}_{num}(j\omega)| = \sqrt{\underline{H}_{num}(j\omega) \cdot \underline{H}_{num}^*(j\omega)}$

$$= \sqrt{\left(\frac{e^{j\omega T_e} - 1}{e^{j\omega T_e} - 1 + T_e/\tau} \right) \left(\frac{e^{-j\omega T_e} - 1}{e^{-j\omega T_e} - 1 + T_e/\tau} \right)} = \dots$$

Tout calcul fait on obtient $G_{num}(\omega) = \sqrt{\frac{1 - \cos(\omega T_e)}{\frac{T_e^2}{2\tau^2} + (1 - \cos(\omega T_e)) \left(1 - \frac{T_e}{\tau}\right)}}$ Elle est f_e -périodique. (0.75)



c- Si $f \rightarrow 0$ on remarque que $G_{num} \cong G_{an}$.

Lorsque f augmente les gains augmentent mais prennent des valeurs nettement différentes car l'échantillonnage n'est plus réalisé à un grand nombre de points par période. Au-delà de $f_e/2$, les deux filtres sont plus comparables. C'est plus pire, puisque le gain numérique chute et tend vers 0 très rapidement. En effet dans ce domaine de fréquences la condition de Shannon n'est pas respectée et par conséquent le filtrage n'est pas adapté.

Enfin, on remarque que $G_{num}(A_i) = G_{num}(A_0)$. Ce résultat est en accord avec la question 4-b le filtre agit sur les points A_i comme si étaient le point A_0 car les signaux A_i sont perçus comme A_0 . Il s'agit du repliement de spectre traduisant une perte d'information. (0.75)

FIN DU CORRIGE