

Devoir de contrôle d'Algèbre - BGA.

Exercice 1 :

1. Montrer la convergence et calculer les sommes des séries suivantes :

$$(i) \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}.$$

$$(ii) \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^n n!}.$$

$$(iii) \sum_{n \geq 0} \frac{n+1}{(-3)^n}.$$

2. Etudier la nature des séries suivantes :

$$(i) \sum_{n \geq 1} \frac{\sin(2^n)}{n^2}.$$

$$(ii) \sum_{n \geq 1} \ln \left(1 + \frac{1}{n\sqrt{n}} \right).$$

$$(iii) \sum_{n \geq 1} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n.$$

$$(iv) \sum_{n \geq 1} \sin \left(\frac{1}{n} \right).$$

Exercice 2 :

1. Montrer que $\mathcal{B} = (1, X, X(X-1))$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

2. Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Déterminer les coordonnées de P dans la base \mathcal{B} .

Exercice 3 :

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3, et p et q deux réels dans l'intervalle $]0, 1[$. Lors d'un examen, Ali et Ahmed répondent à un Q.C.M. de n questions pour lequel à chaque question il n'y a que deux choix possibles : VRAI ou FAUX. On ne peut laisser une question sans réponse. Ali et Ahmed adoptent deux stratégies de réponse que l'on étudie.

Partie I : étude de la stratégie de Ali

Ali coche une case au hasard à chaque question, et les réponses données sont supposées mutuellement indépendantes.

1. Calculer la probabilité de l'évènement V : " Ali a coché la case VRAI à toutes les questions".
2. Calculer la probabilité de l'évènement V_+ : " Ali a coché la case VRAI au moins à une question".
3. Calculer la probabilité de l'évènement E : " Ali coche la case VRAI à la question 1, coche la case VRAI à la question 2 et coche la case FAUX à la question 3".
4. Calculer la probabilité de l'évènement A : " à l'issue des trois premières questions, Ali coche la case VRAI exactement deux fois".

Partie II : étude de la stratégie de Ahmed

Ahmed coche une case choisie au hasard à la première question, et pour chaque question :

- Si Ahmed coche la case VRAI à une question, il coche encore VRAI la question suivante avec probabilité p . Sinon il coche la case FAUX.
- Si Ahmed coche la case FAUX à une question, il coche encore la case FAUX à la question suivante avec probabilité $1 - q$. Sinon il coche la case VRAI.

Pour tout entier naturel non nul k on notera V_k l'évènement "Ahmed coche VRAI à la question numéro k ", et on note v_k la probabilité de l'évènement V_k .

1. (a) Calculer v_1 , v_2 et v_3 .
(b) Montrer que les évènements V_2 et V_3 sont indépendants, si et seulement si, $p = q$.
2. (a) Calculer la probabilité de l'évènement F : " Ahmed coche la case VRAI à la question 1, coche la case VRAI à la question 2, et coche la case FAUX à la question 3".
(b) Calculer la probabilité de l'évènement B : " à l'issue des trois premières questions, Ahmed coche la case VRAI exactement deux fois".
3. On sait que Ahmed a coché VRAI à la question numéro 2. Quelle est la probabilité qu'il ait coché VRAI à la question numéro 1?
4. (a) Trouver une relation de récurrence entre v_{k+1} et v_k valable pour tout entier k dans $\{1, \dots, n-1\}$.
(b) En déduire v_n en fonction de n .