UNIVERSITÉ DE SFAX
⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆
Institut Préparatoire aux Études
d'Ingénieurs de Sfax

Année universitaire : 2018/2019

Devoir de Synthèse de Mathématiques

Exercice

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On pose :

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \,;\, (x, y, z) \mapsto (x + z, 2x + y + 4z, x + y + 3z)$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2. Ecrire A la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.
3. (a) Donner une base de $\ker(f)$.
   (b) En déduire $\mathrm{rg}(f)$ le rang de f, puis donner une base de $\mathrm{Im}(f)$.
4. (a) Montrer que $\mathbb{R}^3 = \ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.
   (b) Donner une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ formée par des vecteurs de $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.
   (c) Déterminer $D = Mat(f, \mathcal{B}')$.
5. On désigne par P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$.
   (a) Calculer P et P^{-1}.
   (b) Vérifier que $A^n = PD^nP^{-1}$, pour $n \in \mathbb{N}$ (*On ne demande pas de faire les calculs*).

Problème

Partie I. Soit $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer N^2 et N^3.
2. On définit l'application $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi(t) = I_3 + tN + \frac{t^2}{2}N^2.$$

   (a) Vérifier que, $\forall (t, s) \in \mathbb{R}^2$, $\varphi(t) \cdot \varphi(s) = \varphi(t + s)$.
   (b) En déduire que, $\forall t \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $(\varphi(t))^n = \varphi(nt)$.
   (c) Montrer que, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi(t)$ est inversible. Quel est son inverse.
3. On pose $P = I_3 + N$, où I_3 est la matrice unité.
   (a) Montrer, en développant $(I_3 + N)^3$, que $P^3 = I_3 + 3(P - I_3)P$.
   (b) Déduire que P est une matrice inversible et trouver son inverse en fonction de P et I_3.
   (c) Calculer P^{-1}.

Partie II. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. On pose $D = P^{-1}AP$.
   Calculer D, puis D^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Calculer A^n.
3. On considère les suites réelles $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}, (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :
   $$\begin{cases} x_{n+1} & = & -x_n \\ y_{n+1} & = & x_n \\ z_{n+1} & = & -2x_n - 2y_n + 2z_n \end{cases}$$
   où $x_0 = y_0 = z_0 = 1$ et on note par $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$.

   (a) Vérifier que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = AU_n$.

   (b) Montrer par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}$, on a : $U_n = A^n U_0$.

   (c) En déduire l'expression de x_n, y_n et z_n en fonction de n.