INSTITUT PREPARATOIRE
AUX ETUDES D'INGEGNIEURS
SFAX
Département de la Préparation
Mathématiques Physique

A.U 2016-2017
PBG 2
Durée: 1 H 30 mn

Devoir de Contrôle en Mathématiques

Exercice 1

On considère une suite infinie de lancers d'une pièce équilibrée. Deux joueurs G et H s'affrontent dans un jeu dont les règles sont les suivantes:

• G est gagnant si la configuration "pile, pile, face" apparaît dans la suite de lancers avant que la configuration "face, pile, pile" n'apparaisse.

• H est gagnant si la configuration "face, pile, pile" apparaît dans la suite de lancers avant que la configuration "pile, pile, face" n'apparaisse.

On se propose de déterminer lequel des deux joueurs a plus de chances de gagner.

1) Pour tout $n \geqslant 3$, on note G_n l'évènement: "G est déclaré gagnant à l'issue du $n^{-\text{ième}}$ lancer", et on pose $g_n = P(G_n)$.

1-a) Calculer g_3 et g_4 . Montrer que, pour tout $n \geqslant 3$. on a $g_n = \frac{1}{2^n}$.

1-b) En déduire la probabilité que G soit gagnant .

2) On note d_n la probabilité que, lors des n premiers lancers, n'apparaisse jamais deux piles consécutifs .

2-a) Calculer d_1 et d_2 .

2-b) En utilisant la formule des probabilités totales, sachant le résultat du premier lancer puis du deuxième lancer montrer, pour tout $n \geqslant 1$

$$d_{n+2} = \frac{1}{2}d_{n+1} + \frac{1}{4}d_n$$

2-c) En déduire d_n . (**Indication**: on cherche r_1, r_2 les racines de l'équation: $r^2 = \frac{1}{2}r + \frac{1}{4}$ et $d_n = ar_1^n + br_2^n$.)

2-d) En déduire que la série $\sum d_n$ coverge et calculer sa somme.

3) On note les évènements :
A_n : "un joueur est déclaré gagnant à l'issue du $n^{-\text{ième}}$ lancer", pour tout $n \geqslant 3$.
B_n : "aucun joueur n'est encore déclaré gagnant à l'issue du $n^{-\text{ième}}$ lancer", pour tout $n \geqslant 2$.

3-a) Montrer, pour tout $n \geqslant 2$: $P(B_n) = \frac{1}{2^n} + d_n$.

3-b) En déduire, pour tout $n \geqslant 4$: $P(A_n) = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^3}d_{n-3}$.

3-c) Montrer que la probabilité que l'un des joueurs soit déclaré gagnant vaut 1 .

3-d) En déduire la probabilité que le joueur H soit déclaré gagnant .

3-e) Conclure.

<u>**Exercice**</u> **2**

Soient les suites réelles $(x_n)_{n\geqslant 1}$, $(y_n)_{n\geqslant 1}$ et $(z_n)_{n\geqslant 1}$ définies par les trois premiers termes $x_1 = y_1 = 0, z_1 = 1$ et les relations de récurrence
$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{4}z_n$, $y_{n+1} = y_n + \frac{1}{4}z_n$ et $z_{n+1} = \frac{1}{2}z_n$.

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ on note $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$

1-a) Donner une matrice M tel que l'on a: pour tout $n \in \mathbf{N}^*, X_{n+1} = M\ X_n$.

1-b) Montrer que $\forall n \in \mathbf{N}^*, X_n = M^{n-1}\ X_1$.

2) Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

2-a) Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.

2-b) Soit $D = P^{-1}MP$. montrer que $D = diag(1, 1, \frac{1}{2})$.

2-c) Exprimer M^{n-1} en fonction de P , P^{-1} , D et n .

3) En déduire x_n , y_n et z_n en fonction de n.

Bon Travail