Université de Sfax

Institut Préparatoire aux

Etudes d'Ingénieurs de Sfax

A.U. 2020/2021

Section P. T.1

Devoir de contrôle d'Algèbre N°1

Durée: 1 heure.

Exercice 1. Soient A et P deux matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définies par:

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 0 & -8 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} ; P = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(1) (a) Calculer le déterminant de P.

(b) Déduire que P est inversible, puis calculer son inverse P^{-1}.

(2) Montrer que $P^{-1}AP = D$ où $D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(3) (a) Calculer D^n, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(b) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

(4) Pour toute matrice $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on note:

$$C(B) = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid BM = MB\}$$

(a) Montrer que, si M et N sont dans $C(B)$ et α un réel alors $\alpha M + N$ est encore un élément de $C(B)$.

(b) Montrer que, si M et N sont dans $C(B)$ alors le produit MN est encore un élément de $C(B)$.

(5) Prouver que pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on a l'équivalence suivante:

$$M \in C(A) \Leftrightarrow P^{-1}MP \in C(D).$$

Exercice 2. On considère les applications f et g définies par:

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \qquad\qquad g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x, y) \longmapsto xy \qquad\qquad x \longmapsto (x, x^2)$$

(1) Déterminer $f \circ g$.

(2) (a) Montrer que f est surjective. f est elle injective?

(b) Montrer que g est injective. g est elle surjective?

(3) Montrer que $f \circ g$ est bijective.