UNIVERSITÉ DE SFAX

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Institut Préparatoire aux Études d'Ingénieurs de Sfax

Année universitaire : 2020/2021

Devoir de synthèse d'Analyse-Semestre N°1
Section : P.T.1

Durée : 1h30 **Nbre de pages : 2**

Exercice 1

Soit m un paramètre réel non nul.

1. Selon le signe de m, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $r^2 + m = 0$.
2. Selon les valeurs de m, résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$(E_m) : y'' + my = e^{\left(\sqrt{|m|}\right)x}.$$

Exercice 2

On considère l'ensemble $A = \left\{\frac{x}{n};\ n \in \mathbb{N}^* \text{ et } x \in]-\infty, -1]\right\}$.

1. Montrer que A admet une borne supérieure.
2. Pour $a > 0$, posons $N = E\left(\frac{1}{a}\right) + 1$.
   (a) Montrer que : $-a < -\frac{1}{N} < 0$.
   (b) En déduire que : $\sup(A) = 0$.
3. A possède-t-il un maximum ?

Problème

Partie 1

On considère la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

1. Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $\frac{1}{2\sqrt{x+1}} < \sqrt{x+1} - \sqrt{x} < \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $U_n > 2\sqrt{n+1} - 2$.
3. Déduire la limite de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Partie 2

On considère les deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par

$$a_n = U_n - 2\sqrt{n+1} \qquad \text{et} \qquad b_n = U_n - 2\sqrt{n}.$$

1. a) Etudier la monotonie des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

   b) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $a_n \leq b_n$.

   c) En déduire que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont convergentes.

   d) Montrer que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont convergentes vers la même limite. On note leur limite commune par l.

2. Justifier qu'il existe une suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que

$$U_n = 2\sqrt{n} + l + c_n \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} c_n = 0.$$

3. On considère la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $W_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{4n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

   a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $W_n = U_{4n} - U_n$.

   b) En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} W_n$.

4. En déduire que, pour toutes suites quelconques de nombres réels $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

$$\text{les écritures} \quad \left(\lim_{n\to+\infty} X_n = \lim_{n\to+\infty} Y_n\right) \quad \text{et} \quad \left(\lim_{n\to+\infty} (X_n - Y_n) = 0\right)$$

   ne sont pas toujours équivalentes.

   Puis donner une condition pour que ces écritures soient équivalentes.