Université de SFAX **02/11/2019**
IPEIS : PT1 **Algèbre**

Devoir de contrôle

Exercice I:
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$.
$A_n = \sum_{p=0}^{n} \cos^2(\frac{p\pi}{n})$.
$B_n = \sum_{p=0}^{n} \sin^2(\frac{p\pi}{n})$.

1. Calculer $A_n + B_n$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \neq 2k\pi$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$.
   Calculer $S_n(x) = \sum_{p=0}^{n} \cos(px)$.
3. **a.** Montrer que $\cos^2(x) - \sin^2(x) = \cos(2x)$.
   b. Déduire que $A_n - B_n = 1$.
4. Déterminer alors les valeus A_n et B_n.

Exercice II:
Les parties sont indépendantes.

Partie 1 :

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, on pose $w = e^{\frac{2i\Pi}{n}}$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'equation suivante : $(1-z)^n = 1$, puis donner les racines en fonction de w.
2. Soit $a \in]-\pi, \pi[$. Déterminer la forme exponentielle de $1 - e^{ia}$.
3. On admet que $\prod_{k=1}^{n-1}(1 - w^k) = n$. Montrer que $\prod_{k=1}^{n-1} \sin(\frac{k\pi}{n}) = \frac{n}{2^{n-1}}$.

Partie 2 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $T_n = \sum_{p=0}^{n} \sum_{k=p}^{n} C_k^p$.

1. Rappeler la formule de binôme de Newton.
2. Calculer T_n.
3. Montrer que $\sum_{k=p}^{n} C_k^p = C_{n+1}^{p+1}$, pour $p \geq n$. (ind : On pourra raisonner par récurrence sur n)
4. Retrouver la valeur de T_n.

Barème :
Ex1 : 8 pts (1 ;2 ;1,2 ;2)
Ex2 : 12 pts (2 ;1 ;2 : : :1 ;2 ;2 ;2)