Université de SFAX | **03/01/2020**
IPEIS : PT1 | **Algèbre**

Devoir de synthèse n 1

Exercice I:
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Calculer $S = 1 + 5 + 5^2 + ... + 5^{n-1}$.
2. En déduire que 4 divise $5^n + 19$.

Exercice II:
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on considère le polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ défini par :

$$P_n(X) = 1 + X + X^2 + ... + X^n.$$

1. Donner la valeur de $P_n(1)$.
2. Montrer que $(1 - X)P_n(X) = 1 - X^{n+1}$.
3. Déduire les raçines de P_n dans $\mathbb{C}$, puis le factosiser dans $\mathbb{C}[X]$.
4. On pose

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln(1 - \cos(\frac{2k\pi}{n+1}))$$

   a. Montrer que $\prod_{k=1}^{n}(1 - e^{\frac{2ik\pi}{n+1}}) = n + 1$.
   b. Déduire que $\prod_{k=1}^{n}(1 - e^{-\frac{2ik\pi}{n+1}}) = n + 1$.
   c. Montrer que $\prod_{k=1}^{n}(1 - \cos(\frac{2k\pi}{n+1})) = \frac{(n+1)^2}{2^n}$.
   d. Déduire que $\lim_{n\longrightarrow\infty} S_n = -\ln(2)$.

Exercice III:
I.

1. Montrer que l'application

$$f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin(x) \end{array}.$$

   ni injective, ni surjective.
2. Montrer que l'application

$$f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^x \end{array}.$$

   est injective, non surjective.

3. Montrer que l'application

$$f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z^2 \end{array}.$$

est surjective, non injective.

II.

Soient g et h deux applications définies par

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array},$$

$$h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & XP \end{array}.$$

1. Montrer que l'application g n'est pas injective.
2. Soit $Q = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k = a_0 + a_1 X + ... + a_n X^n \in \mathbb{R}[X]$, $n \in \mathbb{N}$,

   on pose $R = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} X^{k+1} = a_0 X + \frac{a_1}{2} X^2 + ... + \frac{a_n}{n+1} X^{n+1}$.

   Montrer que $g(R) = Q$, puis déduire que g est surjective.
3. Montrer que l'appliction h est injective.
4. L'application h est-elle surjective ?

III.

1. Déterminer les expressions de $g \circ h(P)$ et $h \circ g(P)$, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$.
2. L'application $h \circ g$ est-elle bijective?
3. On va montrer que $g \circ h$ est bijective.
   a. Résoudre dans $\mathbb{R}[X]$ l'equation : $P = -XP'$ d'inconnue P.
   b. Déduire que $g \circ h$ est injective.
   c. Si $P = \sum\limits_{k=0}^{n} b_k X^k \in \mathbb{R}[X]$, déterminer $h(P) = h(\sum\limits_{k=0}^{n} b_k X^k)$, puis déduire que

      $g \circ h(P) = \sum\limits_{k=0}^{n} (k+1) b_k X^k$.
   d. Calculer $g \circ h(\frac{X^k}{k+1})$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, puis déduire que $g \circ h$ est surjective, conclure.

..................*Bon Travail*..................