UNIVERSITÉ DE SFAX **Année universitaire : 2019/2020**

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Institut Préparatoire aux Études d'Ingénieurs de Sfax

Devoir de synthèse d'Analyse-Semestre N°1
Section : P.T.1

Durée : 2h **Date : 07 Janvier 2020** **Nbre de pages : 2**

Exercice 1

Soient A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}_+^*$. On note $A.B$ l'ensemble défini par

$$A.B = \{z = x.y \text{ tels que } x \in A \text{ et } y \in B\}.$$

1. Justifier l'existence de $\sup(A)$ et $\sup(B)$.
2. Montrer que $A.B$ est majorée et justifier l'existence de $\sup(A.B)$.
3. Montrer que $\sup(A.B) = \sup(A).\sup(B)$.
4. Soit l'ensemble C défini par

$$C = \left\{ e^{-n^2} \arctan\left(\frac{1}{m}\right), \qquad n \in \mathbb{N} \text{ et } m \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

   Déduire $\sup(C)$.

Exercice 2

1. a) Calculer sur $]0, +\infty[$, $A(u) = \int \frac{1}{u(1+u)} du$.

   (Ind. Utiliser le fait que $\frac{1}{u(1+u)} = \frac{1}{u} - \frac{1}{1+u}$.)

   b) En utilisant le changement de variable $u = e^x$, calculer

$$B(x) = \int \frac{1}{1+e^x} dx.$$

2. Soit l'équation différentielle

$$(E): \qquad (1+e^x)y' - y = 1 - x + e^x$$

   a) Vérifier que $y(x) = x$ est une solution sur $\mathbb{R}$ de (E).

   b) Résoudre l'équation (E) sur $\mathbb{R}$.

Problème

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 - x^2$ et $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de nombres réels définie par :

$$\begin{cases} U_0 \in \mathbb{R}, \\ U_{n+1} = f(U_n), \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

On pose $\alpha = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $\beta = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Partie 1 : Préliminaires

1. Déterminer les valeurs possibles de la limite de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans le cas de convergence.
2. a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(f \circ f)(x) - x = x(1-x)(x^2 + x - 1).$$

   b) En déduire les points fixes de $f \circ f$.
3. Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.
4. Déduire que les intervalles $[0, 1]$ et $]-\infty, \alpha[$ sont stables par f.

Partie 2 : Dans cette partie, on prend $U_0 = -2$.

1. Vérifier que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie sur $]-\infty, \alpha[$.
2. Etudier la monotonie de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. En raisonnant par l'absurde, montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = -\infty$.

Partie 3 : Dans cette partie, on prend $U_0 = \frac{1}{2}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n \in [0, 1]$.
2. Montrer que les suites $(U_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(U_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones. (préçiser le sens de monotonie).
3. En déduire que les suites $(U_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(U_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes.
   Soit $l_1 = \lim\limits_{n\to+\infty} U_{2n}$ et $l_2 = \lim\limits_{n\to+\infty} U_{2n+1}$.
4. En déduire les valeurs de l_1 et l_2.
5. Conclure la nature de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$.