UNIVERSITÉ DE SFAX | Année universitaire : 2019/2020

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Institut Préparatoire aux Études d'Ingénieurs de Sfax

Devoir de contrôle d'Analyse-Semestre N°1
Section : P.T.1

Durée : 1h | **Date : 29 Octobre 2019** | **Nbre de pages : 1**

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2(1+x+x^2)}$.

1. Calculer $\displaystyle\int \frac{1}{1+x+x^2}dx$.
2. Trouver les réels A et B tels que $f(x) = \dfrac{A}{x^2} + \dfrac{B}{1+x+x^2}$.
3. En déduire $\displaystyle\int f(x)dx$ sur $\mathbb{R}^*$.

Exercice 2

On se propose de simplifier la fonction $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$ de deux manières différentes.

I) Soit h la fonction définie par $h(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$.

1. Calculer h' et dresser le tableau de variations de h sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire le domaine de définition de f qu'on note par Df.
3. Etudier la parité de f sur son Df.
4. Vérifier que f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.
5. Montrer que pour tout $x \in [0, +\infty[\setminus\{1\}$, $f'(x) = \dfrac{2(1-x^2)}{(1+x^2)\mid 1-x^2 \mid}$.
6. Exprimer f en fonction de arctan sur $[0, +\infty[$.
7. En déduire une expression simple de f sur $\mathbb{R}$.

II) 1. Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \arcsin(\sin(2x))$.

a) Etudier la parité et la périodicité de φ.

b) Montrer que φ admet $\Delta : x = \dfrac{\pi}{4}$ comme axe de symétrie.

c) Simplifier l'expression de φ sur $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$, puis sur $\left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

d) Représenter graphiquement φ sur $\mathbb{R}$.

2. a) Vérifier que pour tout $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $\dfrac{2\tan t}{1+\tan^2 t} = \sin(2t)$ et calculer $f(\tan t)$.

b) Exprimer f en fonction de arctan sur $[0, +\infty[$.