UNIVERSITÉ DE SFAX

Année universitaire : 2016/2017

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Institut Préparatoire aux Études d'Ingénieurs de Sfax

Devoir de synthèse d'Analyse-Semestre N°2
Section : P.T.1

Durée : 2h | Date : 08 Mai 2017 | Nbre de pages : 2

Exercice 1

Une urne contient 4 boules rouges et 2 boules noires indiscernables au toucher.

1. On tire au hasard simultanément et sans remise deux boules de l'urne.
   On définit les événements A_i pour $i \in \{0, 1, 2\}$ comme suit :
   A_i : « on a obtenu i boules noires » ;
   a) Montrer que $\{A_0, A_1, A_2\}$ constituent un système complet d'événements.
   b) Calculer $p(A_0)$, $p(A_1)$ et en déduire $p(A_2)$.
2. Après ce premier tirage, on effectue à nouveau un tirage au hasard simultanément de deux boules de l'urne. On définit les événements B_i pour $i \in \{0, 1, 2\}$ comme suit :
   B_i : « on a obtenu i boules noires au tirage n°2 ».
   a) Calculer $p(B_0/A_0)$, $p(B_0/A_1)$ et $p(B_0/A_2)$. En déduire $p(B_0)$.
   b) Calculer $p(B_1/A_0)$ et $p(B_1/A_1)$. En déduire $p(B_1)$.
   c) On a obtenu une seule boule noire lors du deuxième tirage. Quelle est la probabilité d'avoir obtenu une seule boule noire lors du premier tirage.
3. On considère l'événement
   R : « il a fallu exactement les deux tirages pour que les deux boules noires soient tirées de l'urne ». Calculer $p(R)$.

Exercice 2

Etudier la nature de la série de terme général U_n dans chacun des cas suivants

1. $U_n = \ln(n \sin(\frac{1}{n}))$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
2. $U_n = \dfrac{-n + \cos n}{n^3 + 1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Problème

Partie 1

On considère la fonction réelle f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{1+t^2+t^4}}\, dt.$$

1. Montrer que f est impaire.
2. Montrer que pour tout $x \geq 0$,
$$\frac{x}{\sqrt{1+4x^2+16x^4}} \leq f(x) \leq \frac{x}{\sqrt{1+x^2+x^4}}.$$
3. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et en déduire $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.
4. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f'(x) = \frac{3 - 12\, x^4}{g(x)}$$
où g est une fonction strictement positive sur $\mathbb{R}$.
5. Donner le sens de variations de f sur $\mathbb{R}$.

Partie 2

Le but de cette partie est d'étudier la nature de la série $\sum\limits_{n \geq 0} f(n)$.

1. Vérifier qu'on peut utiliser la méthode de comparaison série-intégrale pour étudier la nature de la série $\sum\limits_{n \geq 1} f(n)$.
2. Montrer que pour tout $k \geq 1$,
$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x)dx \leq f(k).$$
3. On définit la suite $(S_n)_{n \geq 1}$ par $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f(k)$ pour tout $n \geq 1$. Montrer que
$$S_n \geq \int_1^{n+1} f(x)dx.$$
4. Montrer que pour tout $x \geq 1$,
$$\frac{1}{5x} \leq f(x) \leq \frac{1}{x}.$$
En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_1^{n+1} f(x)dx$.
5. Conclure la nature de la série $\sum\limits_{n \geq 0} f(n)$.