

Définitions et notations

- ◆ $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: l'ensemble des matrices carrées d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ et à coefficients réels.
- ◆ $\mathbb{R}_n[X]$: l'ensemble des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à $n \in \mathbb{N}$.
- ◆ $0_{\mathbb{R}[X]}$: le polynôme nul.
- ◆ $id_{\mathbb{R}_n[X]}$: l'application identité de $\mathbb{R}_n[X]$.
- ◆ I_n : la matrice identité d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$.
- ◆ 0_n : la matrice nulle d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$.
- ◆ Soient $P = aX^3 + bX^2 + cX + d \in \mathbb{R}_3[X]$ et $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On définit le polynôme de la matrice M par :

$$P(M) = aM^3 + bM^2 + cM + dI_3.$$

Exercice

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ tel que $a \neq b$. On se propose de calculer le déterminant Δ_n d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$

suivant : $\Delta_n = \begin{vmatrix} b & a & \dots & \dots & a \\ a & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a \\ a & \dots & \dots & a & b \end{vmatrix}.$

1. Calculer Δ_2 puis Δ_3 .
2. Donner l'expression de Δ_n , pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Problème

On désigne par : \mathcal{B} la base canonique du \mathbb{R} -espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$.

Soit f une application définie par :

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}_2[X] &\longrightarrow \mathbb{R}_2[X] \\ P &\longmapsto (X+2)P' - P \end{aligned}$$

Partie A.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. (a) Déterminer la matrice $M = \text{Mat}(f, \mathcal{B})$ de f dans la base \mathcal{B} .
(b) L'application f est-elle un automorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$? Justifier votre réponse.
3. (a) Montrer que $\ker(f) = \text{Vect}\{u\}$ où $u = X + 2$.
(b) Déterminer une base $\{v, w\}$ de $\text{Im}(f)$.
4. (a) Montrer que $\ker(f) \cap \text{Im}(f) = \{0_{\mathbb{R}[X]}\}$.
(b) Dédire que $\ker(f) \oplus \text{Im}(f) = \mathbb{R}_2[X]$.
(c) En déduire alors que $\mathcal{B}' = \{u, v, w\}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
5. (a) Déterminer la matrice de passage P de \mathcal{B} à \mathcal{B}' puis P^{-1} .
(b) Déterminer $N = \text{Mat}(f, \mathcal{B}')$.

Partie B.

On considère le polynôme P défini par :

$$P(X) = \det(M - XI_3).$$

1. Montrer que $P(X) = X - X^3$.
2. Montrer que :

$$\lambda \in \mathbb{R} \text{ est une racine de } P \iff (f - \lambda \text{id}_{\mathbb{R}_2[X]}) \text{ n'est pas bijective.}$$

3. En déduire les valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ pour lesquelles l'application $(f - \lambda \text{id}_{\mathbb{R}_2[X]})$ est un automorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
4. Calculer $\text{rg}(f - 3\text{id}_{\mathbb{R}_2[X]})$.
5. On pose $J = M - 3I_3$.

- (a) Montrer que le système $(S) : J \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ admet une unique solution dans \mathbb{R}^3 .
- (b) Résoudre (S) .

Partie C.

1. (a) Rappeler la dimension de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
(b) Dédire que la famille $(I_n, M, M^2, \dots, M^9)$ est liée.
2. (a) Montrer que : $M(I_3 - M)(I_3 + M) = 0_3$.
(b) Dédire que $B(M) = 0_3$. (Voir définitions et notations page 1).
3. Soit $n \in \mathbb{N}$.
(a) Trouver le reste de la division euclidienne de X^n par $P(X)$.
(b) Dédire l'expression de M^n en fonction de M et M^2 .
(c) En déduire l'expression de N^n en fonction de P , M et M^2 .