UNIVERSITÉ DE SFAX

Année universitaire : 2016/2017

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Institut Préparatoire aux Études d'Ingénieurs de Sfax

**Devoir de contrôle d'Analyse-Semestre N°2**
**Section : P.T.1**

**Durée : 1h30** | **Date : 21 Février 2017** | **Nbre de pages : 2**

## Exercice

1. Donner le développement limité à l'ordre 3, au voisinage de 0, de la fonction :

$$f(x) = e^{\cos x}.$$

2. En déduire l'équation de la tangente à $C_f$ au point d'abscisse 0 et préciser la position de la courbe par rapport à cette tangente au voisinage de 0.
3. On considère la fonction :

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{\cos x} - e}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

   (a) Montrer que $g$ est continue sur $\mathbb{R}$.

   (b) Vérifier la dérivabilité de la fonction $g$ sur $\mathbb{R}$ et calcuer $g'$.

   (c) Montrer qu'il existe une constante $c \in ]0, 2\pi[$ telle que :

$$e^{\cos c}(c \sin c + 1) = e.$$

## Problème

On considère les fonctions $U$, $h$ et $f$ définies sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par :

$$U(x) = \frac{x}{x-1}, \quad h(x) = \arctan(U(x)) \text{ et } f(x) = \frac{3x}{\pi} h(x).$$

### Partie 1

1. Montrer que les fonctions $U$, $h$ et $f$ sont dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et calculer leurs dérivées.
2. Montrer que la fonction $f'$ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et que sa dérivée $f''$ s'exprime par :

$$f''(x) = \frac{\alpha x + \beta}{P^2(x)}, \ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

où $P$ est un polynome réel du second degré et $\alpha, \beta$ sont deux constantes réelles.

3. Dresser le tableau de variation de la fonction $f'$ sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
4. Calculer $f'(0)$ et dresser le tableau de variation de la fonction $f$.
5. $f$ admet-elle un développement limité d'ordre 2 au voisinage de 1 ?

**Partie 2**

On définit la fonction $g$ comme étant la restriction de $f$ sur $]1, +\infty[$.

1. Montrer qu'il existe une fonction $\tilde{g}$ prolongeant la fonction $g$ par continuité sur $[1, +\infty[$.
2. La fonction $\tilde{g}$ est-elle de classe $C^2$ sur $[1, +\infty[$ ?
3. En déduire que $\tilde{g}$ est de classe $C^\infty$ sur $[1, +\infty[$.

**Partie 3**

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\begin{cases} U_0 = 2, \\ U_{n+1} = \tilde{g}(U_n), \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1. Vérifier que $U_n \geq 1, \ \forall n \in \mathbb{N}$
2. Montrer que $\tilde{g}$ admet un unique point fixe $\alpha \in [1, +\infty[$.
3. Montrer que $\forall (x, y) \in [1, +\infty[^2, \quad |\tilde{g}(x) - \tilde{g}(y)| \leq \dfrac{3}{4} |x - y|$.
4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |U_n - \alpha| \leq \left(\dfrac{3}{4}\right)^n |2 - \alpha|$.
5. En déduire que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.