

Devoir de Contrôle 1 : Analyse

**N.B : Aucun document n'est autorisé et l'usage de la calculatrice est interdit.**

**Exercice 1 :**

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on pose  $f(x) = \arctan(\operatorname{sh}(x))$  et  $g(x) = \arctan(e^x)$ .

1. Calculer la dérivée des fonctions  $f$  et  $g$ .
2. En déduire pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , une relation entre  $f(x)$  et  $g(x)$ .
3. Déterminer une primitive de la fonction  $x \mapsto \frac{1}{\operatorname{ch}(x)}$ .
4. Donner les solutions réelles de l'équation :

$$(E) : y'(x) + \frac{1}{\operatorname{ch}(x)}y(x) = xe^{-2g(x)}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

**Exercice 2 :**

1. On considère la fonction  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie pour tout  $x \in \mathbb{R}$  par  $\varphi(x) = \arcsin(\sin(2x))$ .
    - (a) Donner le domaine de définition  $D_\varphi$  de  $\varphi$ .
    - (b) Etudier la périodicité de  $\varphi$ .
    - (c) Montrer que la droite  $\Delta : x = \frac{\pi}{4}$  est un axe de symétrie de  $\varphi$ .
    - (d) Simplifier l'expression de  $\varphi(x)$  pour  $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ .
    - (e) Déduire la représentation graphique de  $\varphi$  sur  $D_\varphi$ .
  2. Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$ .
    - (a) Déterminer le domaine de définition de  $f$ .
    - (b) Etudier la parité de  $f$ .
    - (c) Pour tout  $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ , montrer que  $f(\tan(t)) = \varphi(t)$ .
    - (d) Exprimer alors pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x)$  à l'aide de  $\varphi$  et de  $\arctan$ .
    - (e) Déduire des questions précédentes les variations de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .
    - (f) Dresser le tableau de variations de  $f$  en précisant ses limites en  $\pm\infty$ .
-