**Université De Sfax**
*Institut Préparatoire aux Etudes d'Ingénieur de Sfax*
****************

**A.U** : 2021-2022
**Niveau :** *PC1*

Devoir de Synthèse N° 1 : **Analyse**
Durée : 2H

**N.B :Aucun document n'est autorisé et l'usage de la calculatrice est interdit.**

## Exercice 1 :

1. Pour tout $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, on définit la fonction :

$$f(t) = \ln\left(\sqrt{\frac{1+\sin(t)}{1-\sin(t)}}\right).$$

   (a) Montrer que $f$ est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ puis déterminer $f'$.

   (b) Dresser le tableau de variation de $f$ puis montrer que $f$ est bijective de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ dans $\mathbb{R}$ et que $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f^{-1}(x) = \arcsin\left(\frac{sh(x)}{ch(x)}\right).$$

2. On considère l'équation différentielle suivante

$$(\mathbf{E}) : \quad y' + \tan(t)y = 1 \quad ; \quad \forall t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\cdot$$

   (a) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation homogène.

   (b) Montrer que $\phi : t \to \cos(t)f(t)$ est une solution particulère de $(\mathbf{E})$.

   (c) Déterminer la solution générale de $(\mathbf{E})$.

3. On se propose de résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation

$$(\mathbf{E}_m) : \quad (1+x^2)^2y'' + 2x(1+x^2)y' + my = 0\cdot$$

   où $m$ est un paramètre réel et $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable.

   (a) Montrer que $y$ est solution de $(E_0)$ si et seulement si $(1+x^2)y' = k$ où $k$ est une constante réelle.

   (b) Déterminer alors l'ensemble des solutions de $(E_0)$.

   (c) Soit $m \neq 0$. Pour tout $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, on pose

$$z(t) = y(\tan(t)).$$

i. Montrer que $y$ est solution de $(E_m)$ si et seulement si $z$ est solution de l'équation

$$(\mathbf{E'}_m) : \quad z'' + mz = 0.$$

ii. Résoudre $(\mathbf{E'}_m)$ selon la valeur de $m$.

iii. Déterminer alors l'ensemble des solutions de $(\mathbf{E}_m)$.

**Exercice 2 :**

1. (a) Montrer que $\ln(1+x) \leq x, \quad \forall x \in ]-1, +\infty[$.

   (b) Déduire que $\dfrac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \dfrac{1}{k}, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$.

   (c) Montrer que $\ln(n+1) \leq \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq 1 + \ln(n), \quad \forall n \geq 2$.

   (d) Déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln(n)$.

   (e) Déterminer $\displaystyle\lim_{n \longrightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

2. Soit $a > 0$ et la suite réelle $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} U_0 = a \\ U_{n+1} = U_n + \dfrac{1}{U_n}; \ \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

   (a) Montrer que la suite $(U_n)$est bien définie et que $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n \in [a, +\infty[$.

   (b) Montrer que la suite $(U_n)$ est croissante.

   (c) Déduire que la suite $(U_n)$ diverge vers $+\infty$.

3. (a) Exprimer pour tout $k \in \mathbb{N}$, $U_{k+1}^2 - U_k^2$ en fonction de $U_k^2$ puis prouver que

$$U_n^2 = 2n + a^2 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{U_k^2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

   (b) Déduire que $U_n^2 \geq 2n, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.

   (c) Retrouver alors la limite de la suite $(U_n)$.

   (d) Montrer que $U_{n+1}^2 - U_n^2 = 2 + o(1)$.

4. (a) Prouver que $U_n^2 \leq 2n + 1 + a^2 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2k}, \quad \forall n \geq 2$.

   (b) Montrer que $2n \leq U_n^2 \leq 2n + \dfrac{3}{2} + a^2 + \dfrac{\ln(n-1)}{2}, \quad \forall n \geq 2$.

   (c) Déduire que $U_n \sim \sqrt{2n}$.

---

Bonne Chance