**Université De Sfax**
*Institut Préparatoire aux Etudes*
*d'Ingénieur de Sfax*
*****************

**A.U** : 2019-2020
**Section :PC1**

Examen N° 2 : **Analyse**
Durée : 2H

**N.B:** **Aucun document n'est autorisé .**

## Exercice 1:

Soit $f(x) = arctan(x) + \sqrt{x^2-1}$.

1. Donner le domaine de définition et le domaine de dérivabilité de $f$.
2. Soit $g(t) = \arctan(t+\sqrt{3})$.
   (a) Calculer $g(0)$, $g'(0)$ et $g''(0)$ puis déduire le développement limité de $g$ à l'ordre 2 au voisinage de 0 .
   (b) Donner le développement limité de $f$ à l'ordre 2 au voisinage de $\sqrt{3}$ .
   (c) Déduire l'équation de la tangente $T$ à la courbe de $f$ au point $A(\sqrt{3}, f(\sqrt{3}))$ et préciser la position de la courbe de $f$ par rapport à $T$ au voisinage de $A$.
3. (a) Déterminer le développement limité de arctan à l'ordre 1 au voisinage de 0 puis déduire le développement limité de la fonction $t \to \arctan\left(\frac{1}{t}\right)$, $t > 0$ , à l'ordre 1 au voisinage de 0.
   (b) Trouver le développement limité de $x \to \frac{f(x)}{x}$ à l'ordre 2 au voisinage de $+\infty$ .
   (c) Déduire que la courbe de $f$ possède une asymptote $D$ au voisinage de $+\infty$ que l'on déterminera et étudier la position de la courbe de $f$ par rapport à $D$ au voisinage de $+\infty$.

## Exercice 2:

1. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe $C^1$ sur $[0,1]$ et deux fois dérivable sur $]0,1[$, telle que $f(0) = 0$, $f(1) = 0$, $f'(0) < 0$ et $f''(x) > 0$ , $\forall x \in ]0,1[$.
   (a) Montrer qu'il existe $\alpha \in ]0,1[$, tel que $f'(\alpha) = 0$.

(b) Montrer que $\forall x \in [0, \alpha[$, $f'(x) < 0$ puis déduire que $f(\alpha) < 0$.

(c) On suppose qu'il existe $\beta \in ]0,1[$ tel que $f(\beta) = 0$, montrer qu'il existe $c_1 \in ]0, \beta[$ et $c_2 \in ]\beta, 1[$, tel que $f'(c_1) = f'(c_2) = 0$ puis déduire une contraduction.

(d) Déterminer alors le signe de $f(x)$ sur $]0,1[$.

2. Application: Soit $a$ et $b$ des réels, tels que $a < b$. On considére la fonction $f$ définie par $f(x) = e^{(xa+(1-x)b)} - xe^a - (1-x)e^b$ .

(a) A l'aide du théorème des accroissements finis, montrer que

$$(b-a)e^a < e^b - e^a < (b-a)e^b.$$

(b) Montrer que $f$ vérifie les hypothése du 1, puis déduire que $\forall x \in ]0,1[$,

$$e^{(xa+(1-x)b)} < xe^a + (1-x)e^b.$$

**Exercice 3:**

On définit la fonction $f$ par:

$$\forall x \in ]0, \frac{\pi}{2}[, f(x) = (\cos(x))^{\frac{1}{x}}.$$

1. Montrer que $f$ est bien définie sur $]0, \frac{\pi}{2}[$, et que $f$ est continue et dérivable sur cet intervalle.

2. (a) Montrer que $f$ est prolongeable par continuité en 0, donner la valeur de $f(0)$ obtenue.

(b) Montrer que $f$ est prolongeable par continuité en $\frac{\pi}{2}$, donner la valeur de $f(\frac{\pi}{2})$ obtenue.

3. (a) Montrer que $f$ est dérivable en 0 et préciser la valeur de $f'(0)$.

(b) Calculer la dérivée de $f$ sur $]0, \frac{\pi}{2}[$, et montrer que $f'$ est continue en 0 .

4. (a) Montrer que $\forall x \in ]0, \frac{\pi}{2}[$, on a:

$$\frac{f(x)}{x - \dfrac{\pi}{2}} = \frac{(\cos(x))^{\frac{2}{\pi}}}{x - \frac{\pi}{2}} e^{(\frac{1}{x} - \frac{2}{\pi}) \ln(\cos(x))}.$$

(b) Montrer que

$$\cos(x) \underset{\frac{\pi}{2}^-}{\sim} \frac{\pi}{2} - x .$$

Conclure que:

$$\ln(\cos(x)) \underset{\frac{\pi}{2}^-}{\sim} \ln(\frac{\pi}{2} - x) .$$

En déduire que:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} e^{(\frac{1}{x} - \frac{2}{\pi}) \ln(\cos(x))} = 1.$$

(c) Montrer que:

$$(\cos(x))^{\frac{2}{\pi}} \underset{\frac{\pi}{2}^-}{\sim} (\frac{\pi}{2} - x)^{\frac{2}{\pi}} .$$

En déduire la valeur de $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \dfrac{f(x)}{x - \frac{\pi}{2}}$.

(d) La fonction $f$ est-elle dérivable en $\frac{\pi}{2}$ ? Comment interpréter graphiquement le résultat précdent?

**Bon Travail**