Section : P C 1 | Matière : Algèbre

A. U. : 2019-2020 | Durée : 1h 30 mn

# Devoir de Contrôle N° 02

**Une grande importance sera attachée à la rigueur du raisonnement, à la clarté de la rédaction et au soin de la présentation.**

## Exercice 1

Décomposer la fraction rationnelle suivante en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ :

$$F = \frac{X}{(X^2-1)(X^2+1)}$$

## Exercice 2

Soient $E$ un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et $f \in \mathscr{L}(E)$. Montrer les équivalences suivantes :

1. $\ker(f) = \ker(f^2) \iff \ker(f) \cap \operatorname{Im}(f) = \{0_E\}$.
2. $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Im}(f^2) \iff \ker(f) + \operatorname{Im}(f) = E$.

## Exercice 3

Soient $E = \mathbb{R}_2[X]$ et $f$ l'application définie comme suit :

$$f : E \longrightarrow E,\ P \longmapsto P + (X^2+1)P''.$$

1. Montrer que $f$ est un endomorphisme de $E$.
2. Etudier l'injectivité de $f$.
3. Déterminer une base de $\operatorname{Im}(f)$.
4. L'application $f$ est-elle un automorphisme de $E$ ?
5. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $F_n = \ker(f^n - 3^n \mathrm{id}_E)$ et $G_n = \ker(f^n - \mathrm{id}_E)$.
   (a) Déterminer une base de $F_1$ et une base de $G_1$.
   (b) Déduire $\dim(F_1)$ et $\dim(G_1)$.
   (c) Montrer que $E = F_1 \oplus G_1$.
   (d) Expliciter la symétrie vectorielle par rapport à $F_1$ parallèlement à $G_1$.
   (e) Montrer que la somme $F_n + G_n$ est directe.
   (f) A-t-on $E = F_n \oplus G_n$ ?