Université de sfax Institut Préparatoire aux Etudes d'ingénieurs de Sfax

–Matière:Analyse . Section : PB A.U : 2022/2023

Devoir de Contrôle N°2 Durée : 1H

N.B : Aucun document n'est autorisé et l'usage de la calculatrice est interdit.

EXERCICE N° 1 :

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x)=xe^{\frac{1}{x}}$

1°)Montrer que f est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$

2°) Montrer que f' est croissante sur $]0,+\infty[$

3°) a- En appliquant le théorème des accroissements finis à f sur $[x,x+1]$ $(x>0)$

Montrer qu'il existe $c\in\,]x,x+1[\;/\;(x+1)e^{\frac{1}{x+1}}-xe^{\frac{1}{x}}=\frac{c-1}{c}e^{\frac{1}{c}}$

b- Déduire que :$\left(1-\frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}\leq(x+1)e^{\frac{1}{x+1}}-xe^{\frac{1}{x}}\leq\left(1-\frac{1}{x+1}\right)e^{\frac{1}{x+1}}$.

c- Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\left((x+1)e^{\frac{1}{x+1}}-xe^{\frac{1}{x}}\right)$.

EXERCICE N° 2 :

1°)Donner le développement limité à l'ordre 3 de $\left(\sqrt{1+4x}-e^{x}\right)$ *et de* xe^{x} au voisinage de 0.

Soit f l'application définie sur $\left[-\frac{1}{4},+\infty\right[\setminus\left\{0\right\}$ *par* $f(x)=\frac{\sqrt{1+4x}-e^{x}}{xe^{x}}$.

2°) a- Donner le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de 0.

b- Déduire que f est prolongeable par continuité en 0 et donner sa fonction prolongée $\widetilde{f}$.

c- Montrer que $\widetilde{f}$ est dérivable en 0 et donner $\widetilde{f}\,'(0)$.

d- Donner l'équation de la tangente à $C_{\widetilde{f}}$ au point d'abscisse 0 et indiquer sa position relative .

ON DONNE :

- $(1+x)^{\propto} = 1 + \propto x + \propto(\propto - 1)\frac{x^2}{2!} + \propto(\propto - 1)(\propto - 2)\frac{x^3}{3!} + o(x^3)$ *avec* $\propto \in \mathbb{R}$.

- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$.

- $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + o(x^2)$.