Université Sfax A.U. 2022-2023

IPEIS PB&G1

Mathématiques / Algèbre

E.F.S- N°2

Exercice 1 : Soit IR^3 l'espace vectoriel sur IR , dit aussi le IR-espace vectoriel IR^3 , muni de « + » et « . » usuelles (la somme de deux éléments de IR^3 est $(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$ et le produit d'un élément de IR^3 par un réel λ est $\lambda(x, y, z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$) et soit les trois vecteurs de IR^3 suivants ,

$$w_1 = (1, 2, 2) \quad , \quad w_2 = (3, 5, 6) \quad , \quad w_3 = (2, 0, 3)$$

1) Que signifie que (w_1, w_2, w_3) est libre ?

2) Que signifie que (w_1, w_2, w_3) est générateur (dit aussi famille génératrice) de l'espace vectoriel IR^3 ?

3) Que signifie que (w_1, w_2, w_3) est une base de l'espace vectoriel IR^3 ?

4) Déterminer le rang de (w_1, w_2, w_3) noté $rg(w_1, w_2, w_3)$.

5) a) Justifier que (w_1, w_2, w_3) est libre..

b) Justifier que (w_1, w_2, w_3) est générateur (dit aussi famille génératrice) de l'espace IR^3.

c) Déduire que (w_1, w_2, w_3) est une base de l'espace IR^3 .

6) Soit le système d'équations (S) : $\begin{cases} \alpha + 3\beta + 2\gamma = 1 \\ 2\alpha + 5\beta = 0 \\ 2\alpha + 6\beta + 3\gamma = 2 \end{cases}$ où α, β et γ dans IR.

Ce système (S)possède-t-il une solution (α, β, γ) ? Et cette solution si elle existe est-elle unique ?

(Indication : On peut déduire la réponse d'après **5) b)** et **c)**).

7) Déterminer le triplet (α, β, γ) solution du système d'équations (S).

8) Déduire les coordonnées du triplet $(1, 0, 2)$ de IR^3 dans la base (w_1, w_2, w_3).

Exercice 2 : Soit IR^3 l'espace vectoriel sur IR (dit aussi le IR-espace vectoriel IR^3) muni de « + » et « . » usuelles et soit la partie F de IR^3 suivante ,

$$F = \{ (x, y, z) \in IR^3 \mid x + 6y - z = 0 \}$$

1) Cette partie F est-elle non vide ? (Indication : voir le triplet $(0, 0, 0)$ est-il dans F).

2) **a)** Prouver que pour tous u et v de F, $u + v \in F$.

b) Prouver que pour tous u de F et λ de IR , $\lambda u \in F$.

3) Déduire que F est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel IR^3 .

4) Soit $v_1 = (1, 0, 1)$ et $v_2 = (0, 1, 6)$. Justifier que (v_1, v_2) est générateur de F (dit aussi famille génératrice de F).

(Indication : prouver que $F = \text{Vect}(\{v_1, v_2\})$).

5) **a)** Prouver que (v_1, v_2) est libre.

b) Déduire que (v_1, v_2) est une base du sous-espace vectoriel F et la dimension de F.

Bonne chance