Université de Sfax 2022-2023
IPEIS BG1

Devoir surveillé N^o 2
Algèbre

Exercice 1
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $A_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $\det(A_\lambda) = 2 - 2\lambda$.
2. Déterminer les valeurs de λ pour que la matrice A_λ soit inversible.
3. Déduire la résolution du système linéaire suivant

$$(S) : \begin{cases} x - y = 0 \\ x + y + 4z = 0 \\ x + y + z = 0. \end{cases}$$

Exercice 2
On considère le polynôme P défini par

$$P(x) = 2x^3 + 4x^2 + 4x + 2.$$

1. Déterminer le degré et le coefficient dominant de P.
2. Donner le polynôme dérivé P' du polynôme P.
3. Montrer que -1 est une racine simple du polynôme P (autrement dit racine du polynôme d'ordre de multiplicité 1)
4. On pose $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Vérifier que j est une racine simple de P.
   (Indication : $1 + j + j^2 = 0$)
5. Trouver alors toutes les racines de P en précisant leur ordre de multiplicité.
6. Déduire la factorisation (maximale) du polynôme P
   (a) dans $\mathbb{C}$.
   (b) dans $\mathbb{R}$.

Bonne chance