Université de Sfax

IPEIS

A.U. 2019-2020

PB&G 1

Algèbre / D.C. N°1

EXERCICE : Soit $\omega = e^{i2\pi/3}$ ($= -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, connu aussi en pratique le nombre complexe j).

1) Vérifier que $\omega^3 = 1$.

2) En développant $(1-\omega)(\omega^2 + \omega + 1)$, vérifier que $(1-\omega)(\omega^2 + \omega + 1) = 1 - \omega^3$.

3) Déduire que $\omega^2 + \omega + 1 = 0$.

4) Justifier par une autre méthode que $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ (Indication : ω^2 est égal au conjugué de ω).

5) Soit n et m de IN. Prouver par des propriétés de l'exponentielle la formule $\omega^n \omega^m = \omega^{n+m}$

(dans cette question on n'utilise pas la récurrence).

6) Prouver la formule précédente (de **5)**) par récurrence sur n en regardant m comme fixé.

(on rappelle que, pour tout k de IN , $\omega^{k+1} = \omega\,\omega^k$ et que $\omega^0 = 1$).

7) Sachant qu'en plus $\omega^{kp} = (\omega^k)^p$, pour tous k et p de IN, déduire que pour tout entier n de IN,

$$\omega^n = \begin{cases} 1 & si\ \ r = 0 \\ \omega & si\ \ r = 1 \\ \omega^2 & si\ \ r = 2 \end{cases}$$

où r est le reste de la division de n par 3 (On rappelle que pour tout n il existe deux entiers q et r uniques avec r = 0 , 1 , 2 tel que $n = 3q + r$, cet entier r est le reste de la division).

8) Déduire ω^{302} .

9) Déduire, d'après **7)** , les entiers p de IN tel que $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \ldots + \omega^p = 0$.

(Indication : Pour tous z nombre complexe et n de IN*, $(1-z)(1 + z + z^2 + z^3 + \ldots + z^n) = 1 - z^{n+1}$).

10) Déduire pour ces entiers (de **9)**), que $\sin(2\pi/3) + \sin(4\pi/3) + \ldots + \sin(p\,2\pi/3) = 0$.

Bonne chance