Algèbre / E.S.N°1

Exercice 1 : Pour chacun des énoncés suivants donner une réponse réduite par Vrai ou Faux :

1) L'application f de **IR** vers **IR** telle que $f(x) = x^4$, est injective (On rappelle que $x^4 = (x^2)^2$).

2) L'application f précédente est surjective.

3) L'application g de $\mathbb{R}_+$ vers $\mathbb{R}_+$ telle que l'image de x est x^4, est injective.

4) L'application g précédente est surjective.

5) L'application de **IN** vers **IN*** telle que l'image de tout n de **IN** est $n + 1$, est bijective.

6) La composée de deux applications surjectives est aussi surjective.

7) La composée de deux applications injectives peut être n'est pas injective.

8) La composée de deux applications bijectives est aussi bijective.

Exercice 2 : Soit de G vers G , où $G = \{ a, b, c, d \}$, l'application Ψ définie par,

$$\Psi(a) = a \ , \qquad \Psi(b) = c \ , \qquad \Psi(c) = d \ , \qquad \Psi(d) = b$$

1) Prouver que Ψ est bijective et déterminer sa bijection réciproque Ψ^{-1}.

2) i) Vérifier que $\Psi^3 = Id_G$ (où $\Psi^3 = \Psi \circ \Psi^2$ et $\Psi^2 = \Psi \circ \Psi$, la composée de Ψ avec Ψ. On rappelle que Id_G est l'application de G vers G telle que l'image de tout élément x de G est x).

ii) Déduire Ψ^{2020}.

[*Indication* : on a pour tous n , m de IN, $\Psi^{n+m} = \Psi^n \circ \Psi^m$ et $\Psi^{nm} = (\Psi^n)^m$, avec pour tout k de IN, $(Id_G)^k = Id_G$ et pour toute application φ de G vers G, $Id_G \circ \varphi = \varphi$]

Exercice 3 :

1) Déterminer les solutions x, y et z dans IR du système (S) suivant,

$$(S) : \begin{cases} x + y + z = 4 \\ 3x + 2y + 4z = 6 \\ 9x + 4y + 14z = 6 \end{cases}$$

2) Soit λ un réel et le système (S_λ) défini par,

$$(S_\lambda) : \begin{cases} x + y + z = 4 \\ 3x + 2y + 4z = 6 \\ 9x + 4y + \lambda z = 6 \end{cases}$$

a) Soit $\underline{\lambda = 15}$, déterminer les solutions x , y et z du système correspondant (système noté (S_{15})).

b) Prouver que pour tout $\lambda \neq 14$, le système (S_λ) possède dans IR des solutions x , y et z uniques.

Bonne chance