REPUBLIQUE TUNISIENNE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Concours Nationaux d'Entrée aux Cycles de Formation d'Ingénieurs
Session 2011

الجمهورية التونسية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
المناظرات الوطنية للدخول إلى مراحل تكوين المهندسين
دورة 2011

Concours Technologie

Epreuve de Mathématiques

Date: Lundi 13 Juin 2011 Heure: 8H Durée: 4H Nbre pages: 4

Barème: Partie I: 5,5 pts, Partie II: 6,5 pts, Partie III: 8 pts

La qualité de la rédaction, le soin de la présentation et la rigueur des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies. Il est rappelé que tout résultat énoncé dans le texte peut être utilisé pour traiter la suite, même s'il n'a pu être démontré. L'usage de tout ouvrage de référence et de tout autre matériel électronique est strictement interdit.

Partie I

Le but de cette partie est de calculer les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\,dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$.

Soit la fonction
$$h(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt} \frac{\sin^2 t}{t^2}\,dt.$$

1. Montrer que h est bien définie et continue sur $[0, +\infty[$.
2. (a) Montrer que h est de classe C^2 sur $]0, +\infty[$ et que, pour tout $x > 0$,
$$h''(x) = \frac{1}{2x} - \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\cos(2t)\,dt.$$

   (b) Montrer que, pour tout $x > 0$,
$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\cos(2t)\,dt = \frac{x}{x^2+4}.$$

   (c) En déduire que, pour tout $x > 0$,
$$h'(x) = \frac{1}{2}\ln x - \frac{1}{4}\ln(x^2+4).$$

   (d) Montrer de même que, pour tout $x > 0$,
$$h(x) = \frac{x}{4}\ln\frac{x^2}{x^2+4} - \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{\pi}{2}.$$

3. (a) En déduire que
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\,dt = \frac{\pi}{2}.$$

(b) Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\, dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt.$$

Partie II

Le but de cette partie est de calculer entre autres les sommmes suivantes: $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\sin n}{n}\right)^2$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n}$.

1. Soit φ la fonction de la variable réelle t, 2π-périodique et telle que:

$$\forall t \in [-\pi, \pi[, \ \ \varphi(t) = \frac{\pi}{2} - |t|.$$

On note $S_\varphi(t)$ la série de Fourier de φ.

(a) Préciser pourquoi φ est égale en tout point de $\mathbb{R}$ à la somme de sa série de Fourie $S_\varphi(t)$.

(b) Calculer les coefficients de Fourier réels $a_n(\varphi)$ et $b_n(\varphi)$.

(c) En déduire que

$$S_\varphi(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4\cos((2k-1)t)}{\pi(2k-1)^2}.$$

2. Calculer les somme suivantes:

$$i) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}, \qquad ii) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}, \qquad iii) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

3. Calculer:

$$i) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^4}, \qquad ii) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}.$$

4. On note Φ la primitive de φ telle que $\Phi(0) = 0$.

(a) Montrer que Φ est impaire et périodique de période 2π.

(b) Calculer les coefficients de Fourier réels $a_n(\Phi)$ et $b_n(\Phi)$ de Φ, puis sa série de Fourier.

(c) En déduire les sommes suivantes:

$$i) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^6}, \qquad ii) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6}.$$

5. Soit f la fonction d'une variable réelle, 2π-périodique, impaire et telle que, pour tout $t \in]0, \pi]$, on a:

$$f(t) = \frac{\pi - t}{2}.$$

(a) Calculer les coefficients de Fourier réels $a_n(f)$ et $b_n(f)$ de la fonction f.

(b) Ecrire sa série de Fourier.

6. Montrer que la série numérique $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin n}{n}$ est convergente et que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n} = \frac{\pi - 1}{2}.$$

7. On considère la fonction g, 2π-périodique, impaire et définie sur $]0, \pi]$ par:

$$g(t) = \begin{cases} tf(1) & \text{si } t \in]0, 1], \\ f(t) & \text{si } t \in [1, \pi]. \end{cases}$$

   (a) Calculer les coefficients de Fourier réels $a_n(g)$ et $b_n(g)$ de la fonction g.

   (b) En déduire que sa série de Fourier $S_g(t)$ est égale à

$$S_g(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{n^2} \sin(nt).$$

   (c) Etudier la convergence normale de la série de Fourier de g.

   (d) i. Montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\sin n}{n}\right)^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n}.$$

   ii. Déduire la valeur de la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\cos n}{n}\right)^2$.

   (e) Calculer les sommes suivantes:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2 n}{n^4}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos^2 n}{n^4}.$$

Partie III

- On note par $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n.
- Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit qu'une matrice R de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une racine carrée de A si $R^2 = A$.
- On note par $Rac(A)$ l'ensemble des racines carrées de A.

Le problème propose de déterminer les racines carrées de A dans différents cas.

1. **Cas où A possède n valeurs propres distinctes.**
   On suppose que la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admet n valeurs propres réelles $\lambda_1 < \lambda_2 < .... < \lambda_n$.

   (a) i. Justifier l'existence d'une matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible telle que $A = PDP^{-1}$ où $D = diag(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$.

ii. Montrer que R est une racine carrée de A si et seulement si la matrice $S = P^{-1}RP$ est une racine carrée de D.

(b) Racines carrées de D. Soit S une racine carrée de D.

i. Montrer que D et S commutent et en déduire que la matrice S est diagonale.

ii. On note alors $S = diag(s_1, ..., s_n)$. Que vaut s_i^2 lorsque $i \in \{1, ..., n\}$.

iii. Que peut-on dire de $Rac(A)$ si A admet une valeur propre strictement négative?

iv. Si on suppose que toutes les valeurs propres de A sont positives ou nulles, déterminer les racines carrées de la matrice D. On pourra poser $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$ pour $i \in \{1, ..., n\}$.

(c) Ecrire toutes les racines carrées de A à l'aide de la matrice P. Combien de racines carrées la matrice A admet-elle? (On discutera selon le signe des valeurs propres de A).

(d) Application : Ecrire dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ toutes les racines carrées de

$$A = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. **Cas où A est la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.**

On cherche dans ce cas à déterminer les racines carrées de la matrice nulle.
Soit $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, une racine carrée de la matrice nulle. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont R est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On note r le rang de f.

(a) Montrer que $Im(f) \subset Ker(f)$ et en déduire que $r \leq \frac{n}{2}$.

(b) On suppose que f est non nul, donc $r \geq 1$. Soit $(e_1, ..., e_r)$ une base de $Im(f)$ que l'on complète avec $(e_{r+1}, ..., e_{n-r})$ pour former une base de $Ker(f)$. Pour $i \in \{1, ..., r\}$, on note u_i le vecteur tel que $f(u_i) = e_i$.

i. Montrer que la famille $B = (e_1, ..., e_{n-r}, u_1, ..., u_r)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

ii. Ecrire la matrice de f dans la base B. On notera M_r cette matrice.

(c) Ecrire toutes les racines carrées dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la matrice nulle à l'aide de M_r et d'une matrice inversible P.

(d) Application : Déterminer dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, les racines carrées de la matrice nulle. (On ne cherchera pas à calculer explicitement les coefficients de R)

3. **Cas où $A = I_n$ la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.**

(a) Soit R une racine carrée de la matrice unité I_n.

i. Vérifier que R est une matrice inversible.

ii. Montrer que R est semblable à une matrice diagonale que l'on décrira.

(b) Déterminer $Rac(I_n)$.

4. **Cas où A est une matrice symétrique réelle.**

Une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admet-elle nécessairement une racine carrée?