



Concours Technologie
Epreuve de Physique

Date : Jeudi 16 Juin 2011 Heure : 8 H00 Durée : 4 H Nbre pages : 08

Barème : Problème 1 : 14 pts ; Problème 2 : 06 pts

L'usage d'une calculatrice non programmable est autorisé.

L'épreuve est constituée de deux problèmes indépendants.

Un candidat peut toujours se servir d'un résultat fourni par l'énoncé pour continuer sa composition.

Problème 1



Première Partie : Propagation dans le vide

L'espace est rapporté à un référentiel galiléen $\mathcal{R}(Oxyz)$ de base orthonormée directe $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$. On note $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ la base sphérique.

Dans le vide, une onde électromagnétique, plane, progressive, monochromatique de pulsation ω , est caractérisée par son champ électrique ; en notation complexe $\vec{E}_i(M, t) = E_0 \exp i(\omega t - k_0 z) \vec{u}_x$, avec E_0 une constante positive et $k_0 = \frac{\omega}{c}$. La constante c désigne la célérité de la lumière dans le vide : $c = 3.10^8 \text{ m.s}^{-1}$.

1. Indiquer les caractéristiques de cette onde : direction et sens de propagation, nature et direction de polarisation. Justifier son caractère plan.
2. Déterminer le vecteur champ magnétique $\vec{B}_i(M, t)$ de cette onde.
3. Calculer la densité d'énergie électromagnétique $u_i(M, t)$. Comparer les contributions électrique et magnétique à cette énergie. En déduire la valeur moyenne $\langle u_i(M, t) \rangle$ par rapport au temps de $u_i(M, t)$.
4. Déterminer le vecteur de Poynting $\vec{\Pi}_i$ de cette onde. Commenter le résultat.
5.
 - 5.1. Calculer le flux $\phi(t)$ de $\vec{\Pi}_i$ à travers une surface S plane et perpendiculaire à la direction de propagation.

5.2. En déduire la valeur moyenne par rapport au temps de $\phi(t)$ à travers une surface unité perpendiculaire à la direction de propagation. Cette grandeur est appelée intensité énergétique de l'onde et sera notée I_i .

Deuxième Partie : Réflexion sur un conducteur parfait

Un métal, supposé conducteur parfait, occupe le demi-espace correspondant à $z > 0$ (Figure 1).

Dans le demi-espace $z < 0$, occupé par l'air dont les propriétés électromagnétiques sont assimilées à celles du vide, se propage l'onde décrite dans la première partie.

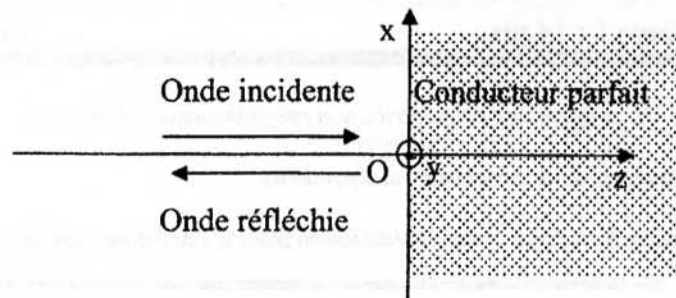


Figure 1

6. Rappeler les caractéristiques du modèle du conducteur parfait.

7.

7.1. Déterminer l'expression complète du champ électrique $\vec{E}_r(M, t)$ de l'onde réfléchie.

7.2. En déduire le champ magnétique $\vec{B}_r(M, t)$ de cette onde.

8. Déterminer les densités surfaciques de charge σ et de courant \vec{j}_s qui peuvent apparaître sur la surface métallique $z = 0$.

9.

9.1. Déterminer, en notation réelle, les champs $\vec{E}(M, t)$ et $\vec{B}(M, t)$ résultants dans l'air.

9.2. Donner brièvement les principales caractéristiques de cette onde résultante.

10. Calculer la valeur moyenne du vecteur de Poynting de cette onde. Commenter le résultat.

11. L'onde électromagnétique exerce sur un élément de surface dS du conducteur une force

$$\text{qui s'écrit : } d\vec{F} = \frac{1}{2}(\sigma \vec{E} + \vec{j}_s \wedge \vec{B})dS$$

11.1. Proposer une explication du facteur $\frac{1}{2}$ dans $d\vec{F}$.

11.2. Déterminer et interpréter le sens de $d\vec{F}$.

11.3. Déterminer la pression de radiation P_{rad} exercée par l'onde électromagnétique sur la surface métallique. Exprimer P_{rad} en fonction de I_i et la célérité c de la lumière dans le vide.

12. Interprétation corpusculaire

Un certain nombre de faits expérimentaux ont conduit les physiciens à introduire l'idée qu'à une onde électromagnétique de pulsation ω et de vecteur d'onde \vec{k} est associée un photon d'énergie $\varepsilon = h\nu = \hbar\omega$ et de quantité de mouvement $\vec{p} = \hbar\vec{k}$ où h est la constante de Planck, avec $\hbar = \frac{h}{2\pi}$.

12.1. Déterminer la densité moyenne n_p de photons associée à l'onde incidente.

12.2. En considérant le rebond des photons sur la paroi métallique $z = 0$, déterminer la quantité de mouvement $d\vec{p}$ transférée au conducteur par un photon ayant subi la réflexion.

12.3. En déduire la pression de radiation P_{rad} subie par la surface métallique.

13. Application : Lévitiation par faisceau Laser

Une bille sphérique, de centre O, de rayon R et de masse m, en métal parfaitement conducteur de masse volumique μ , est plongée dans un faisceau Laser, assimilable à une onde plane d'intensité I_i (Figure 2).

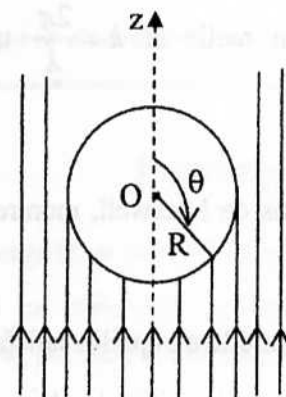


Figure 2

13.1. Montrer que la quantité de mouvement $d\vec{p}_s$ transférée à la sphère par le rebondissement d'un photon associé au faisceau Laser s'écrit : $d\vec{p}_s = \frac{2h\nu}{c} \cos\theta \vec{u}_r$.

13.2. Exprimer la force totale \vec{F} exercée par le faisceau sur la bille en fonction de I_i , R et c.

13.3. En déduire l'intensité minimale I_{min} nécessaire pour soulever la bille. Dans ces conditions, que vaut la puissance P_{min} interceptée par la bille ?

13.4. Calculer la masse minimale de la bille soulevée pour $P_{min} = 30$ W. En déduire le rayon de celle-ci.

On donne : $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$ et $\mu = 1,4 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$.

Troisième Partie : Guide d'onde rectangulaire

On considère un guide d'ondes rectangulaire de longueur supposée infinie suivant Oz, dans lequel règne le vide (permittivité ϵ_0 , perméabilité μ_0). Ce guide est délimité par quatre plans métalliques parfaitement conducteurs (Figure 3). On note λ_0 la longueur d'onde dans le vide illimité.

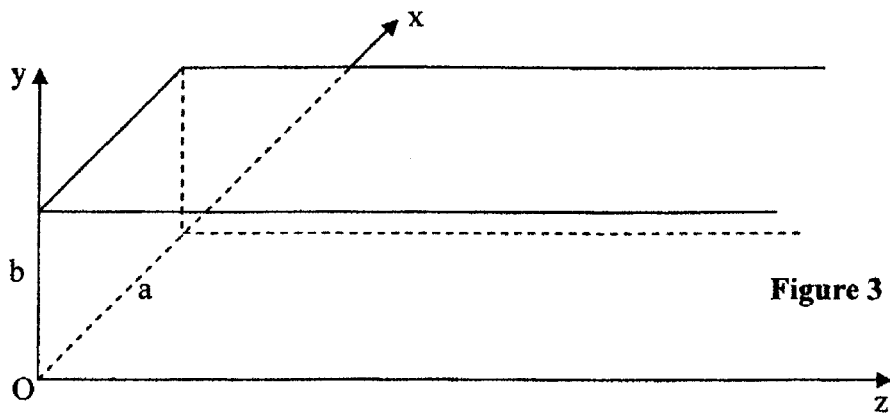


Figure 3

On se propose d'étudier la transmission dans ce guide suivant la direction Oz d'une onde

électromagnétique de pulsation ω , dont le champ électrique s'écrit :

$$\vec{E} = f(x, y) \exp i(\omega t - kz) \vec{u}_x$$

Où $f(x, y)$ désigne une fonction réelle et $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ un nombre réel positif, différent de

$k_0 = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda_0}$.

14. En utilisant l'une des équations de Maxwell, montrer que la fonction $f(x, y)$ ne dépend

pas de x . On la notera $f(y)$.

15. Déterminer l'équation différentielle à laquelle satisfait $f(y)$.

16. En utilisant les conditions que doit vérifier le champ électrique sur les plans conducteurs

limitant le guide d'ondes, montrer que $f(0) = f(b) = 0$.

17.

17.1. Résoudre l'équation différentielle satisfaite par $f(y)$ et montrer que le champ

électrique s'écrit :

$$\vec{E}_n = E_{0n} \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \exp i(\omega t - kz) \vec{u}_x$$

où n est un entier non nul (supposé positif) et E_{0n} est une constante réelle.

Chaque valeur de l'entier n correspond à un mode de propagation.

17.2. Décrire la nature de cette onde.

18. Donner les composantes du champ magnétique \vec{B}_n de cette onde.

19.

19.1. Discuter la transversalité des champs \vec{E}_n et \vec{B}_n .

19.2. Vérifier que \vec{B}_n satisfait également aux conditions aux limites sur les parois

métalliques du guide d'onde.

Concours Technologie - Session Juin 2011

Epreuve de Physique

Page 4/8

20. Exprimer k en fonction de ω , c , n et b . En déduire la longueur d'onde dans le guide λ en fonction de λ_0 , b et n .
21. Montrer qu'il existe une pulsation de coupure ω_c en dessous de laquelle il n'y a plus propagation. Exprimer ω_c en fonction de b et c .
Pour $b = 6 \text{ cm}$, calculer la fréquence de coupure ν_c .
22. Exprimer la vitesse de phase v_ϕ de l'onde en fonction de c , n et du rapport $\frac{\omega}{\omega_c}$.
Commenter.
23.
23.1. Déterminer l'expression du vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$ de l'onde dans le guide.
23.2. En déduire l'expression de la moyenne temporelle $\langle \vec{\Pi} \rangle$ de ce vecteur.
24. Déterminer la puissance moyenne transmise par une section droite du guide d'onde.
25. Déterminer l'expression de la moyenne temporelle $\langle u \rangle$ de l'énergie électromagnétique.
26. En calculant de deux manières différentes l'énergie moyenne traversant pendant dt la section droite du guide, déterminer l'expression de la vitesse de propagation v_e de l'énergie.
27. Quelle relation simple y a-t-il entre v_e et v_ϕ ? Cette relation est-elle universelle ?
28. Si les parois du guide d'ondes ont une conductivité finie, quelle en est la conséquence la plus importante ?

Problème 2

On se propose d'étudier certaines caractéristiques d'un spectrographe à réseau. Ces caractéristiques sont liées au phénomène de diffraction qui présente de nombreuses applications.

Première Partie : Diffraction par une fente

On étudie la figure de diffraction de Fraunhofer donnée par une pupille diffractante (D), contenue dans le plan Oxy, constituée d'une fente F centrée sur l'axe Oz, de largeur a suivant Ox, de longueur $L \gg a$ et de fonction de transparence $t(x)$ (Figure 4).

Cette pupille est éclairée par une onde monochromatique de longueur d'onde λ provenant d'une fente source très fine F_1 parallèle à F et placée au foyer principal objet d'une lentille convergente (L_1) de distance focale image f'_1 . L'écran d'observation se trouve dans le plan focal image d'une lentille convergente (L_2) de distance focale image f'_2 . Ces lentilles sont utilisées dans les conditions de l'approximation de Gauss. Le dispositif est plongé dans l'air d'indice de réfraction égal à 1.

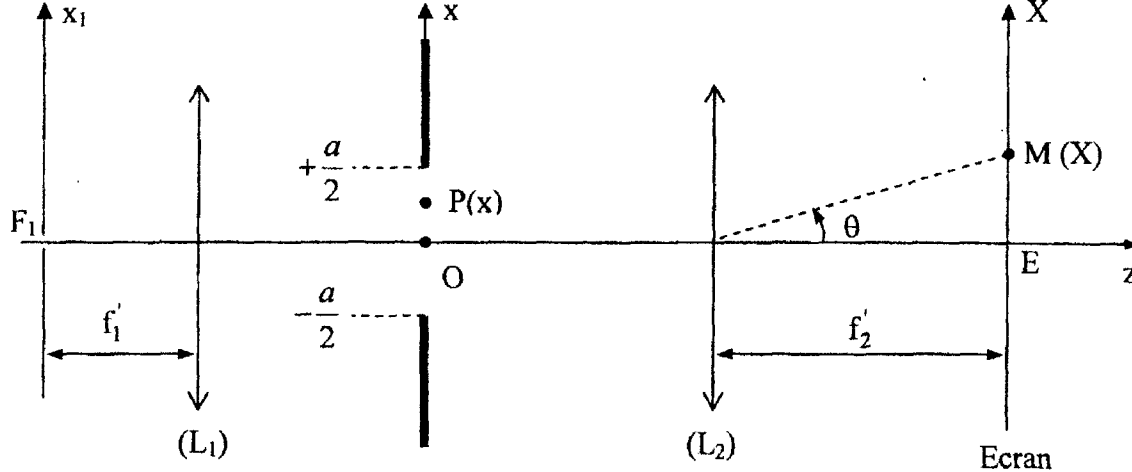


Figure 4

1.

- 1.1. Enoncer le principe de Huygens-Fresnel.
- 1.2. Rappeler les conditions de l'approximation de Gauss.
- 1.3. Définir brièvement l'approximation de Fraunhofer.

2. La fonction de transparence $t(x)$ est donnée par :

$$t(x) = 1 \quad \text{pour} \quad |x| \leq \frac{a}{2}$$

$$t(x) = 0 \quad \text{ailleurs}$$

- 2.1. Tracer, jusqu'au point M de l'écran, le cheminement des rayons diffractés en O et en P dans la direction θ .
- 2.2. Déterminer la différence de chemin optique $\delta(M)$ entre les deux vibrations associées à ces deux rayons.

3.

- 3.1. Etablir l'expression de l'amplitude complexe $\underline{A}(X)$ de la vibration lumineuse diffractée au point M de l'écran par cette fente.
- 3.2. En déduire l'expression de l'intensité lumineuse correspondante $I(X)$.

4.

- 4.1. Représenter $I(X)$, en précisant les positions des minima et des maxima secondaires.
- 4.2. Déterminer approximativement le rapport entre l'intensité du premier maximum secondaire et celle du maximum principal. Commenter.

5. Décrire et justifier brièvement ce qu'on observe lorsqu'on translate, dans son plan, la fente diffractante F d'une distance b suivant l'axe Ox.

Deuxième Partie : Goniomètre à réseau plan de N fentes

Un réseau plan constitué de N fentes identiques parallèles, parfaitement transparentes, de même largeur a et distantes entre elles de d (« pas » du réseau) repose sur la plate-forme d'un goniomètre. Le réseau est éclairé par un faisceau parallèle, monochromatique, de longueur d'onde λ , sous une incidence i . La mobilité du plate-forme autour d'un axe parallèle aux fentes du réseau permet de modifier i . Le faisceau est diffracté à l'infini dans la direction θ . Les angles i et θ sont comptés positivement dans le sens des orientations choisies (Figure 5).

6. Reproduire la figure 5 en complétant le cheminement des rayons considérés.
7. Déterminer la différence de phase $\varphi(M)$ entre les deux vibrations associées aux rayons lumineux provenant des centres de deux fentes consécutives.
8. Les maxima de diffraction d'ordre p sont obtenus dans les directions θ_p . Déterminer l'expression de θ_p (formule fondamentale du réseau).

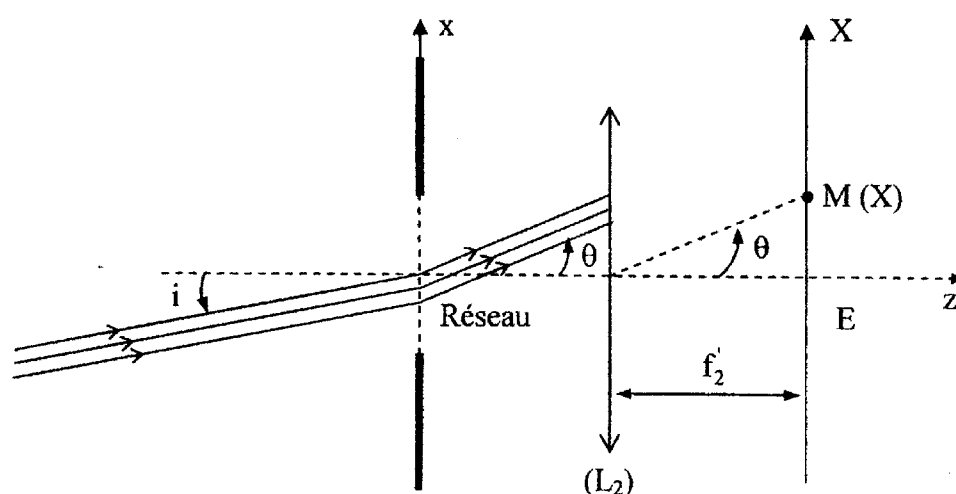


Figure 5

Mesure d'une longueur d'onde :

9. Déterminer la déviation D entre le rayon incident et le rayon diffracté correspondant au maximum d'ordre p .
10.
 - 10.1. Montrer que, lorsque i varie, D passe par un minimum D_m pour $\theta_{pm} = -i_m$.
 - 10.2. En déduire l'expression de D_m en fonction de p , λ et d .
11. Le réseau est maintenant éclairé par un faisceau parallèle d'une lampe à vapeur de mercure. Pour le spectre d'ordre 2, on mesure un minimum de déviation $D_{1m} = 51^\circ 40'$ pour la radiation $\lambda = 435,8 \text{ nm}$. Pour la raie verte, on mesure $D_{2m} = 66^\circ 12'$.
 - 11.1. Déterminer le nombre de traits (fentes) par millimètre du réseau utilisé.
 - 11.2. Déterminer la longueur d'onde de la raie verte du mercure.

Dispersion :

Le réseau est maintenant éclairé sous incidence fixe.

12.

12.1. Déterminer la dispersion angulaire $\frac{d\theta_p}{d\lambda}$ du réseau, à l'ordre p .

12.2. Comment peut-on augmenter cette dispersion ?

13.

13.1. En déduire la dispersion linéaire $\frac{dX_p}{d\lambda}$ du réseau sur l'écran d'observation.

13.2. Que peut-on dire de cette dispersion dans l'approximation des faibles angles ?

13.3. Calculer cette grandeur en mm.nm^{-1} pour l'ordre $p = 2$. On donne : $f'_2 = 250 \text{ mm}$.

14.

14.1. Calculer, à l'ordre 2, la distance ΔX_2 séparant les maxima principaux du doublet jaune de sodium de longueurs d'onde respectives $\lambda_1 = 589,0 \text{ nm}$ et $\lambda_2 = 589,6 \text{ nm}$.

14.2. Le spectrographe utilisé permet-il la résolution de ce doublet, sachant que sa limite de résolution vaut $\Delta X_{2\min} = 0,2 \text{ mm}$.

Fin de l'Epreuve