REPUBLIQUE TUNISIENNE
Ministère de l'Enseignement Supérieur, de la Recherche Scientifique et de la Technologie

Cinquentenaire de l'Université Tunisienne

الجمهورية التونسية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي والتكنولوجيا

المناظرات الوطنية للدخول
إلى مراحل تكوين المهندسين
دورة 2009

Concours Nationaux d'Entrée aux Cycles de Formation d'Ingénieurs
Session 2009

Concours Technologie
Epreuve de Mathématiques

Date:Lundi 01 Juin 2009 Heure: 8 H Durée: 4 heures Nb pages: 4
Barème: Exercice: 6 pts, **Problème:** I : 2.5 pts, II :1.5 pts, III: 3 pts, IV: 3 pts, V: 4 pts.

Une grande importance sera attachée à la rigueur du raisonnement, à la clarté et au soin de la présentation. L'usage des calculatrices n'est pas autorisé. Il est rappelé que tout résultat énoncé dans le texte peut être utilisé pour traiter la suite, même s'il n'a pu être démontré.

Exercice

Pour $z \in \mathbb{C}$ et $t \in \mathbb{R}$, on pose

$$g(z) = \frac{1 - z^2}{1 - 2z\cos(t) + z^2}.$$

1. Vérifier que, pour $z \in \mathbb{C}$,

$$g(z) = -1 + \frac{1}{1 - z\exp(it)} + \frac{1}{1 - z\exp(-it)}.$$

2. En déduire que pour $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| < 1$, on a:

$$g(z) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} z^n \cos(nt).$$

3. Soit $a \in \mathbb{C}$ et $a \notin [-1, 1]$, on pose $f(t) = \dfrac{1}{a - \cos(t)}$, pour $t \in \mathbb{R}$.

   (a) Montrer que l'équation $z^2 - 2az + 1 = 0$, possède une racine complexe qu'on notera ω, vérifiant $|\omega| < 1$.
   (on pourra raisonner par l'absurde et supposer que les deux racines sont de module égal à 1).

   (b) Vérifier que, pour $t \in \mathbb{R}$, on a:

$$f(t) = \frac{2\omega}{1 - 2\omega\cos(t) + \omega^2} = \frac{2\omega}{1 - \omega^2} g(\omega).$$

4. (a) Montrer que la fonction f admet le développement en série de Fourier suivant:

$$f(t) = \frac{2\omega}{1-\omega^2}\left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \omega^n \cos(nt)\right].$$

(b) En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos(nt)}{a-\cos(t)}dt$, pour $n \in \mathbb{N}$.

Problème

Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $F_n(x) = (x^2-1)^n$ et on définit la suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à coefficients réels par :

$$\begin{cases} P_0(x) = 1 \\ P_n(x) = \dfrac{1}{2^n n!}F_n^{(n)}(x), \quad \text{pour } n \geq 1, \end{cases}$$

où $F_n^{(k)}$ désigne la dérivé k-ième de la fonction F_n, k étant un entier positif.

Partie I

1. Expliciter P_1, P_2 et P_3.

2. En utilisant la formule $(x^2-1)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k x^{2n-2k}$, montrer que P_n a pour expression:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \frac{(-1)^k(2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!}x^{n-2k}$$

où $[\alpha]$ désigne la partie entière du réel α.
(on distinguera le cas n pair ou impair).

3. (a) Donner le degré de P_n.

   (b) Vérifier que le coefficient du monôme de plus haut degré du polynôme P_n est égal $\dfrac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$.

   (c) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$.

   (d) Calculer $P_n(0)$. 4
   (on distinguera les cas n pair et n impair).

Partie II

1. En remarquant que $(x^2-1)^n = (x-1)^n(x+1)^n$ et en utilisant la formule de Leibniz montrer que :
$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(C_n^k)^2}{2^n}(x-1)^k(x+1)^{n-k}.$$

2. Déterminer les valeurs $P_n(1)$ et $P_n(-1)$.

3. Calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(C_n^k)^2$.

4. (a) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(C_n^k)^2 = C_{2n}^n$. (on pensera à $P_n(x)$).

   (b) Montrer que pour tout $x \in [-1,1]$, on a: $|P_n(x)| \leq C_{2n}^n$.

Partie III

1. (a) Soit k un entier tel que $0 \leq k \leq n-1$, montrer que $F_n^{(k)}(-1) = F_n^{(k)}(1) = 0$.

   (b) En déduire que pour tout $n \geq 1$, on a $\displaystyle\int_{-1}^{1} P_n(t)dt = 0$.

2. (a) Soit k un entier tel que $0 \leq k \leq n-1$, montrer que $\displaystyle\int_{-1}^{1} t^k P_n(t)dt = 0$.

   (b) En déduire que pour tout polynôme P de degré strictement inférieur à n, on a:
$$\int_{-1}^{1} P(t)P_n(t)dt = 0.$$

3. (a) On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $J_n = \displaystyle\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n dx$. Trouver une relation entre J_n et J_{n-1}, pour $n \geq 1$, puis donner l'expression de J_n.

   (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\int_{-1}^{1} t^n P_n(t)dt = \frac{2^{n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

4. Soient m et n deux entiers naturels, montrer que:
$$\int_{-1}^{1} P_m(t)P_n(t)dt = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n, \\ \dfrac{2}{2n+1} & \text{si } m = n. \end{cases}$$

Partie IV

On désigne par $\mathcal{E}$, l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.

1. Montrer que $\{P_0, P_1, \ldots, P_n\}$ est une base orthogonale de $\mathcal{E}$.

2. Soit $P = \sum_{j=0}^{n} a_j P_j$ un élément de $\mathcal{E}$. Montrer que pour tout $0 \leq k \leq n$, on a :

$$a_k = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^{1} P(t) P_k(t) dt.$$

3. Soit Q le polynôme défini par $Q(x) = xP_{n-1}(x)$, pour $n \geq 2$. Calculer les coordonnées du polynôme Q dans la base $\{P_0, P_1, \ldots, P_n\}$.

4. En déduire que les polynômes P_n satisfont la relation de récurrence :

$$nP_n(x) - (2n-1)xP_{n-1}(x) + (n-1)P_{n-2}(x) = 0, \quad \forall n \geq 2. \qquad (1)$$

Partie V

On considère la série entière réelle $\sum_{n \geq 0} P_n(x) t^n$ de la variable t, x étant considéré comme un paramètre réel vérifiant $-1 \leq x \leq 1$.

1. Soit R le rayon de convergence de cette série. Montrer que $R \geq \frac{1}{4}$.

   (on pourra utiliser II.4.b.).

2. On pose $f(t, x)$ la somme de cette série.

   (a) Expliciter $f(t, 1)$ et $f(t, -1)$.

   (b) Montrer que $f(t, 0) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$.

   (c) En utilisant la relation de récurrence (1), montrer que $f(t, x)$ est solution de l'équation:

   $$(t^2 - 2xt + 1)\frac{\partial f}{\partial t}(t, x) + (t - x) f(t, x) = 0.$$

   (d) Donner l'expression de $f(t, x)$.

Fin de l'épreuve