Concours Nationaux d'Entrée aux Cycles de Formation d'Ingénieurs
Session 2009

Concours Technologie
Correction de l'épreuve de Mathématiques

Exercice

Pour $z \in \mathbb{C}$ et $t \in \mathbb{R}$, on pose $g(z) = \dfrac{1 - z^2}{1 - 2z\cos(t) + z^2}$.

1) 1. Une simple décomposition en éléments simples donne pour $z \in \mathbb{C}$,
$g(z) = -1 + \dfrac{1}{1 - z\exp(it)} + \dfrac{1}{1 - z\exp(-it)}$

2) pour $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| < 1$, on a $|z\exp(it)| < 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a:
$g(z) = 1 + 2\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z^n \cos(nt)$.

3) Soit $a \in \mathbb{C}$ et $a \notin [-a, a]$, on pose $f(t) = \dfrac{1}{a - \cos(t)}$, pour $t \in \mathbb{R}$

a) l'équation $z^2 - 2az + 1 = 0$, admet dans $\mathbb{C}$ deux racines dont le produit vaut 1, donc elle posséde une racine ω vérifiant $|\omega| < 1$. Supposons $|\omega| = 1$, ω s'écrit alors sous la forme $\omega = \exp(i\theta)$ avec $\theta \in \mathbb{R}$, l'autre racine serait $\exp(-i\theta)$.
La somme des deux racines serait $\exp(i\theta) + \exp(-i\theta) = 2\cos(\theta)$
alors $a = \cos(\theta) \in [-1, 1]$, ce qui est absurde. D'o $|\omega| < 1$.

b) Soit $t \in \mathbb{R}$, fixé on a : $\dfrac{2\omega}{1-\omega^2} g(\omega) = \dfrac{1-\omega^2}{1 - 2\omega\cos(t) + \omega^2}\dfrac{2\omega}{1-\omega^2} = \dfrac{2\omega}{1 - 2\omega\cos(t) + \omega^2} \stackrel{3.a)}{=}$
$\dfrac{2\omega}{2a\omega - 2\omega\cos(t)} = \dfrac{1}{a - \cos(t)} = f(t)$

4) $\dfrac{1}{a - \cos(t)} = f(t)$, pour tout $t \in \mathbb{R}$

a)) La fonction f définie sur $\mathbb{R}$, paire , 2π-périodique et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. donc f admet un développement en série de Fourier donné par :
$\dfrac{a_0(f)}{2} + \displaystyle\sum_{n\geq 1} a_n(f)\cos(nt)$ avec $a_n(f) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \dfrac{\cos(nt)}{a - \cos(t)}dt$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

D'aprés le théoréme de Dirichlet on a : $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(t) = \dfrac{a_0(f)}{2} + \displaystyle\sum_{n\geq 1} a_n(f)\cos(nt)$.

D'autre part, $f(t) = \dfrac{2\omega}{1-\omega^2} g(\omega) = \dfrac{2\omega}{1-\omega^2}\left[1 + 2\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \omega^n \cos(nt)\right]$.
d'o le développement en série de Fourier de f est donné par:
$f(t) = \dfrac{2\omega}{1-\omega^2}\left[1 + 2\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \omega^n \cos(nt)\right]$

b) D'aprés l'unicité du développement en série de Fourier on déduit que
$a_0(f) = \dfrac{4\omega}{1-\omega^2}$ et $a_n(f) = \dfrac{4\omega^{n+1}}{1-\omega^2}$, pour tout $n \geq 1$, et comme
$a_n(f) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \dfrac{\cos(nt)}{a - \cos(t)}dt$, en déduire que $\displaystyle\int_0^{\pi} \dfrac{\cos(nt)}{a - \cos(t)}dt = \dfrac{2\pi\omega^{n+1}}{1-\omega^2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Problème

Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $F_n(x) = (x^2 - 1)^n$ et on définit la suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à coefficients réels par :

$$\begin{cases} P_0(x) = 1 \\ P_n(x) = \dfrac{1}{2^n n!} F_n^{(n)}(x), \quad \text{pour } n \geq 1 \end{cases}$$

o $F_n^{(k)}$ désigne la dérivé k-ième de la fonction F_n, k étant un entier positif.

Partie I

1) $P_1(x) = x$, $P_2(x) = \dfrac{1}{2}(3x^2 - 1)$ $P_3(x) = \dfrac{1}{2}(5x^3 - 3x)$ 4

2) comme $(x^2 - 1)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k x^{2n-2k}$, alors $P_n(x) = \dfrac{1}{2^n n!} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k \dfrac{d^n}{dx^n}(x^{2n-2k})$. Or $\forall m, p \in \mathbb{N}$ on a :

$$\frac{d^m}{dx^m}(x^p) = \begin{cases} p(p-1)\dots(p-m+1) & \text{si } m \leq p \\ 0 & \text{si } m > n \end{cases}$$

Il en résulte que pour $0 \leq k \leq n$, on obtient
$\dfrac{d^n}{dx^n}(x^{2n-2k}) = (2n-2k)(2n-2k-1)\dots(n-2k)x^{n-2k}$, si $n \leq 2n-2k$. Ce qui entraine que $2k \leq n$, par suite $k \leq [\frac{n}{2}]$.
Ainsi $\dfrac{d^n}{dx^n}(x^{2n-2k}) = \dfrac{(2n-2k)!}{(n-2k)!} x^{n-2k}$, avec $k \leq [\frac{n}{2}]$. 1)

D'o $P_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \frac{(-1)^k (2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!} x^{n-2k}$

3) a) P_n ont pour degré n le coefficient dominant est $\dfrac{(2n)!}{2^n (n!)^2} = \dfrac{C_{2n}^n}{2^n}$.

b) que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : 2)

$$P_n(-x) = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \frac{(-1)^k (2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!} (-x)^{n-2k} = (-1)^n P_n(x)$$

c) Il est clair que $P_{2m+1}(0) = 0$ d'après la question précedente, pour $n = 2m$ d'après l'expression de P_{2m} on a $P_{2m}(0) = \dfrac{(-1)^m (2m)!}{2^{2m}(m!)^2}$. 3)

Partie II

1) En remarquant que $(x^2 - 1)^n = (x-1)^n (x+1)^n$, on obtient par la formule de Leibniz :

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{d^k}{dx^k}(x-1)^n \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}(x+1)^n.$$

Comme $\dfrac{d^k}{dx^k}(x-1)^n = \dfrac{n!}{(n-k)!}(x-1)^{n-k}$ de mônome $\dfrac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}(x+1)^n = \dfrac{n!}{k!}(x+1)^k$.
Il en résulte:
$P_n(x) == \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(C_n^k)^2}{2^n}(x-1)^k (x+1)^{n-k}$

2) D'aprés la question précedente, on peut écrire $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(C_n^k)^2}{2^n}(x-1)^k(x+1)^{n-k} + \frac{1}{2}$ $1)^n$. En déduire que $P_n(1) = 1$ et comme $P_n(-1) = (-1)^n P_n(1) = (-1)^n$.

3) Comme on a $P_n(x) == \sum_{k=0}^{n} \frac{(C_n^k)^2}{2^n}(x-1)^k(x+1)^{n-k}$, il résulte que $P_n(0) == \sum_{k=0}^{n} \frac{(C_n^k)^2}{2^n}$ et d'après $PartieI - 3 - b$ on a

$$\sum_{k=0}^{n}(C_n^k)^2(-1)^k = 2^n P_n(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2m+1 \\ \dfrac{(-1)^m(2m)!}{(m!)^2} & \text{si } n = 2m \end{cases}$$

4) a) D'aprés l'expression de $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(C_n^k)^2}{2^n}(x-1)^k(x+1)^{n-k}$, il est clair que le coeff de de x^n est $\sum_{k=0}^{n} \frac{(C_n^k)^2}{2^n}$ d'une part d'autre part d'aprés la question $PartieI - 3$ - coefficient de x^n est $\frac{C_{2n}^n}{2^n}$ donc $\sum_{k=0}^{n}(C_n^k)^2 = C_{2n}^n$.

b) Comme $x \in [-1, 1]$,donc $|x-1| \leq 2$ et $|x+1| \leq 2$ on a:
$|P_n(x)| \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{(C_n^k)^2}{2^n}|x-1|^k|x+1|^{n-k} \leq \sum_{k=0}^{n}(C_n^k)^2 = C_{2n}^n$.

Partie III

1) a) F_n est une fonction polynôme admettant 1 et -1 comme racines d'ordre n alors tout k un entier tel que $0 \leq k \leq n-1$, on a $F_n^{(k)}(-1) = F_n^{(k)}(1) = 0$.

b) pour tout $n \geq 1$, on a
$$\int_{-1}^{1} P_n(t)dt = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2^n n!} F_n^{(n)}(t)dt = \frac{1}{2^n n!}\left[F_n^{(n)}(1) - F_n^{(n)}(-1)\right] = 0.$$

2) a) Soit k un entier tel que $0 \leq k \leq n-1$, après k intégrations par parties
$$\int_{-1}^{1} t^k P_n(t)dt = \frac{(-1)^k k!}{2^n n!}\int_{-1}^{1} F_n^{(n-k)}(t)dt = \frac{(-1)^k k!}{2^n n!}\left[F_n^{(n-k-1)}(t)\right]_{-1}^{1} = 0.$$

b) pour tout polynôme P de degré strictement inférieur à n , on a :
$\int_{-1}^{1} P(t)P_n(t)dt = 0$, d'après la linéarité de l'intégrale et la question précedente.

3) a) pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a:
$J_0 = 2$ et pour $n \geq 1$, par intégration par partie deux fois,
$J_n = \int_{-1}^{1}(x^2-1)^n dx = -\frac{2n}{2n+1}J_{n-1}$, en déduire que $J_n = (-1)^n \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_{-1}^{1} t^n P_n(t)dt = \frac{1}{2^n n!}\int_{-1}^{1} t^n F_n^{(n)}(t)dt$, par intégration n fois trouve :
$$\int_{-1}^{1} t^n P_n(t)dt = \frac{(-1)^n}{2^n}\int_{-1}^{1} F_n(t)dt = \frac{(-1)^n}{2^n}J_n = \frac{2^{n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

4) Si $m \neq n$, on peut supposer $m < n$. Dans ce cas $\int_{-1}^{1} P_m(t)P_n(t)dt = 0$ d'après $PartieIII - 2 - b$.
Si $m = n$, dans ce cas on peut écrire $P_n(t) = \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}t^n + Q_{n-1}$ avec $deg(Q_{n-1} < n$.
$\int_{-1}^{1} P_m(t)P_n(t)dt = \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}\int_{-1}^{1} t^n P_n(t)dt + \int_{-1}^{1} Q_{n-1}(t)P_n(t)dt = \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}\int_{-1}^{1} t^n P_n(t)dt = \frac{2}{2n+1}$.
finalement on a : $\int_{-1}^{1} P_m(t)P_n(t)dt = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ \frac{2}{2n+1} & \text{si } m = n \end{cases}$

Partie IV

On désigne par $\mathcal{E}$, l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.

1) $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ est une base de $\mathcal{E}$, car est une fammille de cardinal $n+1 = \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{E}$ échelonné en degré.

2) Puisque $\int_{-1}^{1} P_m(t)P_n(t)dt = \frac{2}{2n+1}\delta_{m,n}$, donc pour tout $0 \leq k \leq n$, on a $\frac{2}{2k+1}a_k = \int_{-1}^{1} P(t)P_k(t)dt$, par suite $a_k = \frac{2k+1}{2}\int_{-1}^{1} P(t)P_k(t)dt$.

b)) comme $\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ est développable en série entière et sa série entière est $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k(2k)!}{2^{2k}(k!)^2} t^{2k}$,

d'autre part $f(t,0) = \sum_{n\geq 0} P_n(0)t^n$ or $P_{2n+1}(0) = 0$ et $P_{2m}(0) = \frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$ on tire que $f(t,0) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} t^{2n}$ et par identification on a $f(t,0) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$.

c) A l'intérieur de son disque de convergence la fonction $f(t,x)$est indéfiniment dérivable par rapport t et on a $ft(t,x) = \sum_{n\geq 0} nP_n(x)t^{n-1}$ en identifiant on obtient l'équation desirée.

$$(t^2 - 2xt + 1)ft(t,x) + (t-x)f(t,x) = 0.$$

d) Par resolution de l'équation différentiel de premiere ordre en t on obtient $f(t,x) = \frac{1}{\sqrt{t^2 - 2xt + 1}}$.