REPUBLIQUE TUNISIENNE
Ministère de l'Enseignement
Supérieur, de la Recherche Scientifique
et de la Technologie
Concours nationaux d'entrée aux cycles de formation d'ingénieurs
Session 2008

الجمهورية التونسية
وزارة التعليم العالي
والبحث العلمي والتكنولوجيا
المناظرات الوطنية للدخول
إلى مراحل تكوين المهندسين
دورة 2008

Concours en Technologie
Epreuve de Physique

Date : Jeudi 05 Juin 2008	**Heure : 8 H00**	**Durée : 4 H**	**Nbre pages : 6**
Barème :	**Problème 1 : 7/20**	;	**Problème 2 : 13/20**

L'usage d'une calculatrice non programmable est autorisé

L'épreuve comporte deux problèmes indépendants, le candidat peut les résoudre dans l'ordre qui lui convient, en respectant néanmoins la numérotation des questions.

Le référentiel R(Oxyz) de base orthonormée ($\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$) est supposé galiléen.

PREMIER PROBLEME : *Bilan thermique pour un corps humain*

A sa naissance, un nouveau-né se retrouve dans un environnement beaucoup plus froid et perd immédiatement de l'énergie.

Le but du problème est de faire des bilans thermiques permettant de cerner les paramètres dont dépend la température interne d'un nouveau-né afin d'éviter une hypothermie, c'est-à-dire une température inférieure à celle normale du corps humain.

I- Diffusion thermique

Le corps humain peut être assimilé à un cylindre homogène de longueur L suivant l'axe Ox et de section droite S (voir figure 1).
Les échanges thermiques avec l'extérieur se font à travers les deux surfaces de base d'aire totale 2S. La surface latérale est isolée thermiquement. On désigne par c et λ respectivement la capacité thermique massique et la conductivité thermique de ce corps. On note $\mathbf{p_v}$ la puissance volumique produite au sein de ce corps (production métabolique).
Les grandeurs $\mathbf{p_v}$, c et λ sont supposées constantes.
En régime permanent, la température en un point M de ce milieu dépend uniquement de son abscisse x ; elle sera notée T(x).

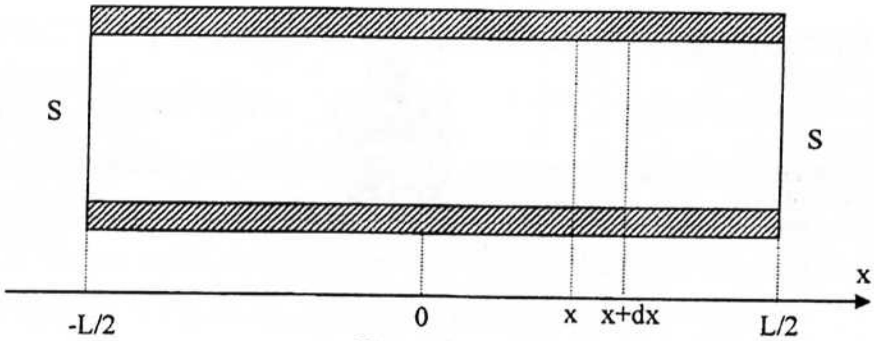

Figure 1

1.a. Rappeler la loi de Fourier relative à la conduction thermique.

1.b. Que représente le flux du vecteur densité volumique de courant thermique $\vec{j}_{th}$ à travers une surface Σ ?

En déduire l'unité de la densité volumique de courant thermique.

2. En effectuant, en régime permanent, un bilan énergétique pour un volume élémentaire compris entre les sections d'abscisses x et x+dx, montrer que l'équation différentielle vérifiée par la température T(x) s'écrit : $\frac{d^2T}{dx^2} = -\frac{p_v}{\lambda}$.

3.a. Résoudre cette équation en supposant que les surfaces en contact avec l'air (en $x = \pm\frac{L}{2}$) sont à la même température T_1.

3.b. En déduire l'expression de la température interne T_0 du corps en x = 0.

4.a. En calculant le vecteur $\vec{j}_{th}$ en $x = \pm\frac{L}{2}$, exprimer la puissance P_1 perdue par le milieu à travers les deux surfaces de base.

4.b. Comparer P_1 à la puissance totale P_0 produite par le métabolisme au sein de tout le volume. Commenter.

4.c. *Applications numériques :*

Calculer, en Kelvin (K) puis en °C, la température interne T_0.

Calculer l'énergie produite par le métabolisme à la fin de la première heure de la naissance.

Données : $S = 10^{-2}\ m^2$; $L = 0{,}5$ m ; $T_1 = 306$ K ; $p_v = 51{,}2\ W.m^{-3}$; $\lambda = 0{,}4\ W.K^{-1}.m^{-1}$.

5. En admettant que 5 % de l'énergie produite par le métabolisme est évacuée suite à l'évaporation du liquide amniotique recouvrant le corps à la naissance, calculer la masse de ce liquide qui s'évapore en une heure.

La chaleur latente de vaporisation du liquide amniotique vaut : $L_v = 2000\ kJ.kg^{-1}$.

II- Transfert convectif

Le corps humain, modélisé comme précédemment, est plongé dans l'air de température T_a.

Il échange avec celui-ci par convection, au niveau des deux surfaces de base de température T_1, une puissance thermique sortante du corps : $P_C = 2\ h_c\ S\ (T_1 - T_a)$, où h_c est une constante positive.

6. Montrer, par analogie avec l'électrocinétique, qu'à ce mode de transfert on peut associer une résistance thermique R_c, dite de convection, dont on donnera l'expression et l'unité.

III- Transfert par rayonnement

La puissance rayonnée par l'unité de surface d'un corps noir dans la bande de fréquence ν e $\nu + d\nu$ s'écrit :

$$dp = \frac{2\pi h\nu^3}{c^2\left(\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right)-1\right)} d\nu \ ;$$

où h, k et c sont respectivement la constante de Planck, la constante de Boltzmann et la célérit de la lumière dans le vide.

7.a. Montrer que la puissance surfacique totale rayonnée par un corps noir est donnée par la lo de Stefan : $p = \sigma T^4$. On donne : $\int_0^{\infty} \frac{u^3}{(\exp u - 1)} du = \frac{\pi^4}{15}$

7.b. Calculer la constante de Stefan σ.

Données : $h = 6{,}62\ 10^{-34}$ J.s ; $k = 1{,}38\ 10^{-23}$ J.K^{-1} ; $c = 3\ 10^8$ m.s^{-1}.

8. Le maximum d'émission thermique pour un corps noir de température $T_1 = 306$ K correspond à la longueur d'onde $\lambda_m \approx 10$ µm.

8.a. Rappeler la loi permettant de calculer λ_m.

8.b. A quel domaine du spectre électromagnétique cette longueur d'onde appartient-elle ?

9. On suppose que l'air et la surface du nouveau-né (d'aire 2S) en contact avec celui-ci se comportent comme des corps noirs de températures respectives T_a et T_1.

9.a. Donner l'expression de la puissance P_R sortante du corps en fonction de S, σ, T_1 et T_a.

9.b. On suppose que l'écart de température $\Delta T = T_1 - T_a$ est faible devant T_a ($\Delta T << T_a$).
Montrer que la puissance P_R peut se mettre sous la forme : $P_R = 2\ h_r\ S\ (T_1 - T_a)$, où h_r est une constante qu'on exprimera en fonction de T_a et σ.

9.c. En déduire que cet échange radiatif est aussi décrit par une résistance thermique R_r, dite de rayonnement, que l'on exprimera en fonction de T_a, σ et S.

10. Dans la suite, on néglige les pertes par évaporation et on ne considère alors que les deux autres modes de transferts thermiques (rayonnement et convection).

10.a. Donner le schéma électrique analogue.

10.b. En déduire l'expression de la résistance thermique équivalente R_e en fonction de h_c, S, σ et T_a.

10.c. Exprimer puis calculer la puissance totale perdue P_p à travers les deux surfaces de base.

Données : $h_c = 2$ W.m^{-2}.K^{-1} ; $T_1 = 306$ K ; $T_a = 300$ K ; $S = 10^{-2}$ m^2.

10.d. Comparer P_p à la puissance totale P_0 produite au sein de tout le volume. Commenter.

11. Afin d'éviter une hypothermie, il est conseillé de couvrir le nouveau-né et de réduire ainsi la surface en contact avec l'air.
Déterminer le pourcentage de surface à couvrir pour avoir une température au milieu du corps de 37°C.

DEUXIEME PROBLEME : *Polarisation des ondes planes*

I- Notion de polarisation

On considère une onde électromagnétique plane progressive monochromatique de pulsation ω e
de vecteur d'onde $\vec{k} = k\,\vec{u}_z$. Son champ électrique s'écrit :

$\vec{E} = E_{0x}\cos(kz - \omega t)\,\vec{u}_x + E_{0y}\cos(kz - \omega t + \varphi)\,\vec{u}_y$; où E_{0x}, E_{0y} et φ sont des constantes réelles.

On désigne par Q le point du plan d'onde (xOy) tel que $\overrightarrow{OQ} = \vec{E}$.

1. Rappeler la définition de la polarisation d'une onde électromagnétique plane.

2. Pour quelles valeurs de φ la polarisation de l'onde est elle rectiligne ?
Illustrer chaque cas par une figure dans le plan d'onde (xOy).

3. Quelles sont les conditions sur E_{0x}, E_{0y} et φ pour avoir une polarisation circulaire ?

4. Dans le cas d'une polarisation circulaire, le sens de parcours sur le cercle peut être obtenu à partir de l'orientation du vecteur $\vec{S} = \overrightarrow{OQ} \wedge \dfrac{d\overrightarrow{OQ}}{dt}$ comparée à celle du vecteur d'onde $\vec{k} = k\,\vec{u}_z$

Ainsi si les vecteurs $\vec{S}$ et $\vec{k}$ sont de même sens (respectivement de sens opposé), on qualifie l'onde de gauche (respectivement de droite).

4.a. Exprimer, pour $z = 0$ et $t = 0$, le vecteur $\vec{S}$.

4.b. En déduire pour chaque valeur de φ correspondant à une polarisation circulaire, le sens de parcours sur le cercle. Illustrer chaque cas par une figure dans le plan d'onde (xOy).

II- Polarisation et réflexion sur un métal parfait

On considère une onde électromagnétique plane progressive monochromatique polarisée rectilignement suivant Ox qui arrive sous incidence normale à un métal, supposé parfait, occupant le demi-espace $z > 0$.
Le champ électrique de cette onde incidente s'écrit : $\vec{E}_i = E_0\cos(kz - \omega t)\,\vec{u}_x$.

5. Le champ électrique $\vec{E}_i$ de cette onde incidente vérifie-t-il les conditions aux limites à la surface du plan métallique ? Justifier.

6.a. Justifier que l'onde réfléchie doit avoir la même polarisation que celle de l'onde incidente.

6.b. On note $E_{0r} = rE_0$ l'amplitude du champ électrique de l'onde réfléchie, où r est une constante réelle, appelée coefficient de réflexion. Déterminer la valeur de r.

7. On considère, à présent, une onde plane progressive monochromatique qui tombe, sous incidence normale, sur le métal parfait.
Son champ électrique s'écrit : $\vec{E}_i = E_0\cos(kz - \omega t)\,\vec{u}_x + E_0\sin(kz - \omega t)\,\vec{u}_y$.

7.a. En utilisant le résultat précédent, écrire le champ électrique $\vec{E}_r$ de l'onde réfléchie.

7.b. Dire, en le justifiant, comment est modifiée la polarisation de cette onde suite à la réflexion.

III- Notion de pouvoir rotatoire

Un milieu est doté d'un pouvoir rotatoire lorsqu'il est capable de faire tourner la direction de polarisation d'une onde plane polarisée rectilignement.

8. Montrer qu'une onde plane polarisée rectilignement suivant l'axe Ox peut être décrite comm la superposition de deux ondes planes polarisées circulairement, l'une droite (notée O_d) e l'autre gauche (notée O_g). On notera $\vec{E}_d$ et $\vec{E}_g$ les champs électriques correspondants.

9. On envoie, à l'entrée ($z = 0$) d'un milieu, une onde plane polarisée rectilignement suivan l'axe Ox. On désigne par E_0 l'amplitude de son champ électrique.

Dans ce milieu une onde circulaire droite se propage avec un vecteur d'onde $\vec{k}_d = k_d\,\vec{u}_z$ alor qu'une onde circulaire gauche se propage avec un vecteur d'onde $\vec{k}_g = k_g\,\vec{u}_z$ avec $k_g \neq k_d$.

9.a. En utilisant le résultat de la question **8**, écrire le champ électrique de l'onde après l traversée d'une épaisseur e de ce milieu.

9.b. En déduire, qu'en $z = e$, l'onde est toujours polarisée rectilignement et que la direction de polarisation a tourné d'un angle θ qu'on exprimera en fonction de $\Delta k = k_d - k_g$ et de l'épaisseu traversée e.

IV- Exemple de milieu à pouvoir rotatoire

On étudie dans cette partie la propagation, selon l'axe Oz, d'une onde plane monochromatiqu dans un milieu ayant la permittivité électrique ε_0 et la perméabilité magnétique μ_0 du vide.

Ce milieu, électriquement neutre, contient des électrons mobiles de charge $(-e)$ et de masse m e des ions supposés fixes. On désigne par n le nombre d'électrons par unité de volume.

Le champ électrique de l'onde s'écrit, en notation complexe : $\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_0 \exp[i(kz - \omega t)]$.

Pour un électron, on néglige le poids, les interactions avec les autres charges ainsi que l'actior du champ magnétique de l'onde.

Le milieu est soumis à un champ magnétique uniforme et stationnaire : $\vec{B}_0 = B_0\,\vec{u}_z$.

10.a. Ecrire l'équation différentielle vérifiée par le vecteur vitesse $\vec{v}$ d'un électron.

10.b. Résoudre, en régime sinusoïdal forcé, cette équation du mouvement et donner les expressions des composantes du vecteur vitesse $\underline{\vec{v}}$ d'un électron.

10.c. En déduire que la densité volumique de courant $\underline{\vec{j}}$ peut se mettre sous la forme :

$$\underline{\vec{j}} = \frac{\underline{\gamma}}{1-\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2}\left(\underline{\vec{E}} + i\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)\vec{u}_z \wedge \underline{\vec{E}}\right) ;$$

où $\omega_c = \dfrac{eB_0}{m}$ et $\underline{\gamma}$ est à exprimer en fonction de ω, ε_0 et $\omega_p = \sqrt{\dfrac{n e^2}{m \varepsilon_0}}$.

11. A partir des équations de Maxwell, on montre que le champ électrique est solution de l'équation : $A_1 \underline{\vec{E}} = i A_2 \underline{\vec{E}} \wedge \vec{u}_z$, avec : $A_1 = k^2 - \dfrac{\omega^2}{c^2} + \dfrac{\omega^2}{c^2}\dfrac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_c^2}$ et $A_2 = \dfrac{\omega^2}{c^2}\dfrac{\omega_c}{\omega}\dfrac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_c^2}$.

11.a. En projetant cette équation sur les axes Ox et Oy, montrer que le champ électrique est nor nul pour $A_1 = \pm A_2$.

11.b. Ecrire, pour chaque cas, la relation entre les composantes $\underline{E}_x$ et $\underline{E}_y$ du champ électrique.

En déduire que chaque cas correspond à une onde plane polarisée circulairement qu'on notera O_g et O_d.

12. Montrer que les relations de dispersion associées aux ondes O_g et O_d s'écrivent respectivement : $k_g^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2}\left(1 - \dfrac{\omega_p^2}{\omega(\omega - \omega_c)}\right)$; $k_d^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2}\left(1 - \dfrac{\omega_p^2}{\omega(\omega + \omega_c)}\right)$.

13. Les signes de k_g^2 et k_d^2, en fonction de la pulsation ω, sont donnés dans le tableau suivant :

pulsation ω	0	ω_c	ω_1	ω_2	∞
signe de k_g^2	+	−	−	+	
signe de k_d^2	−	−	+	+	

On ne cherchera pas à expliciter les pulsations ω_1 et ω_2.

On envoie à l'entrée de ce milieu une onde polarisée rectilignement.

Sans faire de calcul et en exploitant les résultats de la question **8**, donner pour chaque domaine de pulsation, la polarisation de l'onde (si elle existe) après la traversée de ce milieu.

14. On supprime, dans la suite, le champ magnétique $\vec{B}_0$.

14.a. Justifier que le milieu perd son pouvoir rotatoire et que la relation de dispersion s'écrit, indépendamment de la polarisation de l'onde : $k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$.

14.b. Pour $\omega > \omega_p$, calculer la vitesse de groupe v_g et la vitesse de phase v_φ.

Le milieu est-il dispersif ? Justifier.

14.c. Que se passe-t-il pour $\omega < \omega_p$?

V- Mesure du pouvoir rotatoire

On considère le dispositif de la figure 2 comportant deux lentilles convergentes L_1 et L_2 et deux polariseurs parfaits P_1 et P_2.

Une source ponctuelle S, placée au foyer objet de L_1, émet une lumière monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 600$ nm.

On désigne par α l'angle entre les directions des axes de P_1 et P_2 (figure 2).

Au point A, on place un capteur optique permettant de mesurer l'intensité I de la lumière.

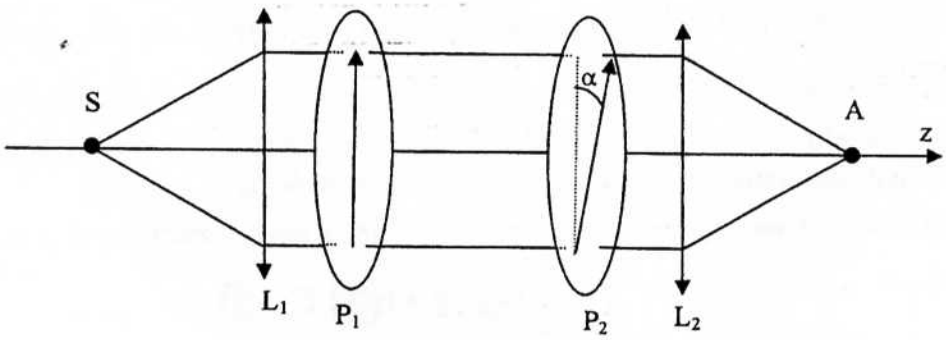

Figure 2

15.a. Montrer que la loi de Malus, donnant l'intensité I en A, s'écrit sous la forme : $I = I_0 \cos^2\alpha$.

15.b. En déduire les valeurs de α permettant d'obtenir une extinction totale de la lumière en A.

16. Après avoir établi une extinction totale de la lumière en A, on intercale entre les deux polariseurs une cellule comportant un milieu doté d'un pouvoir rotatoire.

On admet que l'angle θ avec lequel tourne la direction de polarisation d'une onde polarisée rectilignement est donné par la loi : $\theta = \pi \frac{a}{\lambda}$, avec $a = 10^3$ nm^{-1}.

De combien faut-il tourner l'axe du polariseur P_2 pour rétablir l'extinction de la lumière ?

17. Le dispositif étant réglé comme dans la question **16.**

La source S émet à présent une lumière blanche : $\lambda \in [400 \text{ nm}, 800 \text{ nm}]$.

La lumière reçue au point A est dispersée au moyen d'un prisme.

Quel est le nombre de radiations absentes du spectre ?