Corrigé sujet technologie

Exercice préliminaire

1. . $u \mapsto u^{x-1}e^{-u}$ et $u \mapsto u^{x-1}$ sont positives sur $]0,1]$ et $u^{x-1}e^{-u} \leq u^{x-1}$.

$\int_0^1 u^{x-1}du$ converge pour x>0 donc $\int_0^1 u^{x-1}e^{-u}du$ converge pour x>0.

. $\lim\limits_{u\to+\infty} u^2\left(u^{x-1}e^{-u}\right)=0$ donc il existe A>0 tel que $0 \leq u^{x-1}e^{-u} \leq \dfrac{1}{u^2}$,u $\geq$ A .

comme $\int_1^{+\infty}\dfrac{du}{u^2}$ converge , alors $\int_1^{+\infty}u^{x-1}e^{-u}du$ converge

par conséquent $x \mapsto \Gamma(x)=\int_0^{+\infty}u^{x-1}e^{-u}du$ est définie sur $]0,+\infty[$.

2. a. Pour tout réel $x>0$,

$$\Gamma(x+1)=\int_0^{+\infty}u^x e^{-u}du=\left[-u^x e^{-u}\right]_0^{+\infty}+x\int_0^{+\infty}u^{x-1}e^{-u}du=x\Gamma(x).$$

b. $\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)$ et $\Gamma(1)=\int_0^{+\infty}e^{-u}du=\left[-e^{-u}\right]_0^{+\infty}=1$,

on en déduit par récurrence que $\Gamma(n+1)=n!$.

Problème 1

Partie 1

Soit φ l'application qui à tout $P\in F$ associe la fonction polynôme

$$\varphi(P): t \mapsto t\frac{d^2P}{dt^2}(t)+(-t+1)\frac{dP}{dt}(t).$$

1. Pour tout $P\in F_m$, $\deg\varphi(P)\leq m$, donc $\varphi(P)\in F_m$.

En utilisant la linéarité de la dérivée, on obtient

$\varphi(\alpha P+\beta Q)=\alpha\varphi(P)+\beta\varphi(Q)$, pour tout P, $Q\in F_m$ et $\alpha,\ \beta\in\mathbb{R}$,

Ainsi la restriction de φ à F_m est un endomorphisme que l'on notera φ_m.

2. $\varphi(v_0)=0v_0$, pour $1\leq k\leq m$, $\varphi(v_k)=-kv_k+k^2v_{k-1}$ d'où

$$mat_B(\varphi_m) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & -1 & & . & & & . \\ . & 0 & & & 0 & & . \\ . & & . & & k^2 & . & . \\ . & & & . & -k & & 0 \\ . & & & & 0 & & m^2 \\ 0 & 0 & . & . & . & 0 & -m \end{pmatrix}.$$

3. φ_m possède les m valeurs propres simples $-k$, $0 \leq k \leq m$.

De plus $\dim F_m = m+1$, alors φ_m est diagonalisable.

4. $L_j : t \mapsto \frac{1}{j!} e^t \frac{d^j}{dt^j}\left(t^j e^{-t}\right)$, $t > 0$. La formule de Leibniz s'écrit

$$L_j(t) = \frac{1}{j!} e^t \sum_{\ell=0}^{j} \binom{j}{j-\ell} \frac{d^\ell(e^{-t})}{dt^\ell} \frac{d^{j-\ell}(t^j)}{dt^{j-\ell}}$$

$$= \frac{1}{j!} \sum_{\ell=0}^{j} \binom{j}{j-\ell} (-1)^\ell \frac{j!}{\ell!} t^\ell$$

$$= \sum_{\ell=0}^{j} \binom{j}{j-\ell} \frac{(-t)^\ell}{\ell!} t^\ell.$$

5. Le calcul donne

$$L_0(t) = 1, \quad L_1(t) = -t+1 \quad , L_2(t) = \frac{t^2}{2} - 2t + 1 \quad , \quad L_3(t) = -\frac{t^3}{6} + \frac{3t^2}{2} - 3t + 1 .$$

6. Soit m un entier.

a. $L_j = \sum_{\ell=0}^{j} \binom{j}{j-\ell} \frac{(-1)^\ell}{\ell!} v_\ell$.

$$\varphi_m(L_j) = \sum_{\ell=0}^{j} \binom{j}{j-\ell} \frac{(-1)^\ell}{\ell!} \varphi_m(v_\ell)$$

$$= \sum_{\ell=0}^{j} \binom{j}{j-\ell} \frac{(-1)^\ell}{\ell!} (-\ell) v_\ell + \sum_{\ell=1}^{j} \binom{j}{j-\ell} \frac{(-1)^\ell}{\ell!} \ell^2 v_{\ell-1}$$

$$= -j \frac{(-1)^j}{j!} v_j + \sum_{\ell=0}^{j-1} \left[\binom{j}{j-\ell} \frac{(-1)^\ell}{\ell!} (-\ell) + \binom{j}{j-\ell-1} \frac{(-1)^{\ell+1}}{(\ell+1)!} (\ell+1)^2 \right] v_\ell.$$

Comme $\binom{j}{j-\ell} \frac{(-1)^\ell}{\ell!} (-\ell) + \binom{j}{j-\ell-1} \frac{(-1)^{\ell+1}}{(\ell+1)!} (\ell+1)^2 = -j \binom{j}{j-\ell} \frac{(-1)^\ell}{\ell!}$,

il vient que $\varphi_m(L_j) = -jL_j$.

b. Il découle de ce qui précède que L_j est un vecteur propre associé à la valeur propre $-j$.

F_m est somme directe de ses sous espace propres c'est-à-dire $F_m = \bigoplus_{j=0}^{m} \mathbb{R} L_j$.

Partie 2

1. Soit $f, g \in E$.

$\left|f(t)g(t)\right| \leq \frac{1}{2}\left(f^2(t)+g^2(t)\right)$ d'où $\left|f(t)g(t)\right|e^{-t} \leq \frac{1}{2}\left(f^2(t)e^{-t}+g^2(t)e^{-t}\right)$.

Les fonctions $t \mapsto f^2(t)e^{-t}$ et $t \mapsto g^2(t)e^{-t}$ étant intégrables sur $[0,+\infty[$, il en est de même pour la fonction $t \mapsto f(t)g(t)e^{-t}$.

2. Pour tout $f, g \in E$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, la fonction

$t \mapsto \left(\alpha f(t)+\beta g(t)\right)^2 e^{-t} = \left(\alpha f(t)\right)^2 e^{-t} + 2\alpha f(t)\beta g(t)e^{-t} + \left(\beta g(t)\right)^2 e^{-t}$

est intégrable sur $[0,+\infty[$, comme somme de fonctions intégrables.

Par suite E est un sous-espace vectoriel de $C^0\left([0,+\infty[\right)$.

3. Il est clair que $\langle\ |\ \rangle$ est une forme bilinéaire symétrique sur E.

Soit $f \in E$. La fonction $t \mapsto f^2(t)e^{-t}$ étant continue et positive, il vient que

$$\langle f|f\rangle \geq 0 \qquad \text{et} \qquad \begin{aligned}\langle f|f\rangle = 0 &\Leftrightarrow f^2(t)e^{-t} = 0,\ \ t \in [0,+\infty[\\ &\Leftrightarrow f(t) = 0,\ \ t \in [0,+\infty[.\end{aligned}$$

Par conséquent $\langle\ |\ \rangle$ est un produit scalaire sur E.

4. Pour montrer que F est un sous-espace vectoriel de E, il suffit de montrer que pour tout $P \in F$, la fonction $t \mapsto P^2(t)e^{-t}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.

Comme pour tout entier k, $\int_0^{+\infty} t^{2k}e^{-t}dt = \Gamma(2k+1) = (2k)!$, la fonction $t \mapsto t^{2k}e^{-t}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$. Le résultat en découle.

5. Pour tout couple d'entiers naturels (j, k),

$\langle v_j | v_k\rangle = \int_0^{+\infty} t^{k+j}e^{-t}dt = \Gamma(k+j+1) = (k+j)!$.

Partie 3

1. Soit $P \in F$, $u(P): t \mapsto e^t \frac{d}{dt}\left(P(t)e^{-t}\right)$.

$u(P) = -P + \frac{dP}{dt}$.

2. a. Pour $j \geq 1$ et $k = 0$, $L_j(t) = \frac{1}{j!}e^t \frac{d^j}{dt^j}\left(t^j e^{-t}\right)$.

On suppose que pour tout $j \geq 1$ et $0 \leq k \leq j-1$, $L_j(t) = \frac{1}{j!}e^t \frac{d^{j-k}}{dt^{j-k}}\left(u^k\left(t^j\right)e^{-t}\right)$.

Soit $k+1 \leq j-1$. On peut écrire

$$L_j(t)=\frac{1}{j!}e^t\frac{d^{j-k}}{dt^{j-k}}\left(u^k\left(t^j\right)e^{-t}\right)$$
$$=\frac{1}{j!}e^t\frac{d^{j-k-1}}{dt^{j-k-1}}\left(\frac{d}{dt}\left(u^k\left(t^j\right)e^{-t}\right)\right)$$
$$=\frac{1}{j!}e^t\frac{d^{j-k-1}}{dt^{j-k-1}}\left(u^{k+1}\left(t^j\right)e^{-t}\right)$$

Par conséquent pour tout $j\geq 1$ et $0\leq k\leq j-1$, $L_j(t)=\frac{1}{j!}e^t\frac{d^{j-k}}{dt^{j-k}}\left(u^k\left(t^j\right)e^{-t}\right)$.

b. Pour $j=0$, $L_0=v_0=u^0\left(v_0\right)$,

Pour tout $j\geq 1$, on peut écrire

$$L_j(t)=\frac{1}{j!}e^t\frac{d}{dt}\left(u^{j-1}\left(t^j\right)e^{-t}\right)=\frac{1}{j!}e^t\left(u^j\left(t^j\right)e^{-t}\right)=\frac{1}{j!}u^j\left(v_j\right).$$

3. Soit $g,f\in F$,

$$\left\langle g\,|u(f)\right\rangle=\int_0^{+\infty}g(t)e^t\frac{d}{dt}\left(f(t)e^{-t}\right)e^{-t}dt$$
$$=\left[g(t)f(t)e^{-t}\right]_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}\frac{dg}{dt}(t)\left(f(t)e^{-t}\right)dt$$
$$=-g(0)f(0)-\left\langle\frac{dg}{dt}\middle|f\right\rangle.$$

4. a. Pour établir que pour tous $j\geq 1$ et $1\leq k\leq j$, $u^{j-k}\left(v_j\right)(0)=0$, il suffit de montrer par récurrence sur *k*, que pour tout $j\geq 1$ et $0\leq k\leq j-1$, $u^k\left(v_j\right)$ est une combinaison linéaire de $\left(v_\ell\right)_{j-k\leq\ell\leq j}$. En effet, pour $k=0$, $u^0\left(v_j\right)=v_j$, supposons que pour tout $0\leq k\leq j-1$,

$$u^k\left(v_j\right)=\sum_{\ell=j-k}^{j}\lambda_\ell v_\ell.$$

Rappelons que pour tout $1\leq\ell\leq j$, $u\left(v_\ell\right)=-v_\ell+\ell v_{\ell-1}$.

Pour $0\leq k+1\leq j-1$,

$$u^{k+1}\left(v_j\right)=\sum_{\ell=j-k}^{j}\lambda_\ell u\left(v_\ell\right)=\sum_{\ell=j-k}^{j}\lambda_\ell\left(-v_\ell+\ell v_{\ell-1}\right)$$
$$=\sum_{\ell=j-k}^{j}-\lambda_\ell v_\ell+\sum_{\ell=j-k}^{j}\lambda_\ell\ell v_{\ell-1}=\sum_{\ell=j-k}^{j}-\lambda_\ell v_\ell+\sum_{\ell=j-k-1}^{j-1}\lambda_{\ell+1}\left(\ell+1\right)v_\ell$$

Ce qui prouve que $u^{k+1}\left(v_j\right)$ est une combinaison linéaire de $\left(v_\ell\right)_{j-k-1\leq\ell\leq j}$

Comme pour tout $j\geq 1$, $0\leq k\leq j-1$ et $j-k\leq\ell\leq j$, $v_\ell(0)=0$, on en déduit que pour tout $j\geq 1$ et $1\leq k\leq j$, $u^{j-k}\left(v_j\right)(0)=0$.

b. Soit $g\in F$, montrons que $\left\langle g\,|L_j\right\rangle=\frac{1}{j!}\left\langle g\,|u^j\left(v_j\right)\right\rangle$.

Pour $j=0$, $\left\langle g\,|L_0\right\rangle=\left\langle g\,|v_0\right\rangle=\left\langle\frac{d^0g}{dt^0}\middle|v_0\right\rangle$.

Pour tout $j \geq 1$ et $1 \leq k \leq j$, $u^{j-k}(v_j)(0) = 0$, d'où

$$\langle g | L_j \rangle = -g(0)u^{j-1}(v_j)(0) - \frac{1}{j!}\left\langle \frac{dg}{dt} \middle| u^{j-1}(v_j) \right\rangle = -\frac{1}{j!}\left\langle \frac{dg}{dt} \middle| u^{j-1}(v_j) \right\rangle.$$

En réitérant le même procédé jusqu'à l'ordre j, il vient que $\langle g | L_j \rangle = \frac{(-1)^j}{j!}\left\langle \frac{d^j g}{dt^j} \middle| v_j \right\rangle$.

5. Soit (j, k) un couple d'entiers naturels distincts (j, k), on suppose que $j < k$.

$$\langle L_j | L_k \rangle = \frac{(-1)^k}{k!}\left\langle \frac{d^k L_j}{dt^k} \middle| v_k \right\rangle.$$

Or L_j est un polynôme de degré j, d'où $\frac{d^k L_j}{dt^k} = 0$, par suite $\langle L_j | L_k \rangle = 0$.

6. $\langle v_j | L_k \rangle = \frac{(-1)^k}{k!}\left\langle \frac{d^k v_j}{dt^k} \middle| v_k \right\rangle$.

Pour $k > j$, $\langle v_j | L_k \rangle = 0$.

Pour $k = j$, $\langle v_k | L_k \rangle = \frac{(-1)^k}{k!}\left\langle \frac{d^k v_k}{dt^k} \middle| v_k \right\rangle = \frac{(-1)^k}{k!}\langle k! | v_k \rangle = (-1)^k \langle v_0 | v_k \rangle = (-1)^k k!$.

Pour $k < j$,

$$\langle v_j | L_k \rangle = \frac{(-1)^k}{k!}\langle j(j-1)\dots(j-k+1)v_{j-k} | v_k \rangle = \frac{(-1)^k}{k!}\frac{j!}{(j-k)!}j! = \binom{j}{k}(-1)^k j!.$$

7. $$\|L_j\|^2 = \langle L_j | L_j \rangle = \frac{1}{j!}\langle L_j | u^j(v_j) \rangle = \frac{(-1)^j}{(j!)^2}\left\langle \frac{d^j L_j}{dt^j} \middle| v_j \right\rangle = \frac{(-1)^j}{(j!)^2}\langle (-1)^j j! | v_j \rangle$$

$$= \frac{1}{j!}\langle v_0 | v_j \rangle = 1.$$

8. Soit k un entier naturel et $q_{k+1} : t \mapsto t\, L_k(t)$.

a. Il est clair que $\langle q_{j+1} | L_k \rangle = \langle tL_j | L_k \rangle = \langle L_j | tL_k \rangle = \langle L_j | q_{k+1} \rangle$.

b. Soit un entier $j \geq 2$.

Pour tout $k \leq j-2$, $\langle q_{j+1} | L_k \rangle = \langle L_j | q_{k+1} \rangle = \frac{(-1)^j}{j!}\left\langle \frac{d^j q_{k+1}}{dt^j} \middle| v_j \right\rangle$.

Or $\frac{d^j q_{k+1}}{dt^j} = 0$ car q_{k+1} est un polynôme de degré $k+1 < j$.

On en déduit que $\langle q_{j+1} | L_k \rangle = 0$, $k \leq j-2$.

c. $q_{j+1} = \sum_{\ell=0}^{j} \binom{j}{j-\ell} \frac{(-1)^\ell}{\ell!} v_{\ell+1}$.

$$\langle q_{j+1} | L_j \rangle = \sum_{\ell=0}^{j} \binom{j}{j-\ell} \frac{(-1)^\ell}{\ell!} \langle v_{\ell+1} | L_j \rangle$$
$$= j\,\frac{(-1)^{j-1}}{(j-1)!} \langle v_j | L_j \rangle + \frac{(-1)^j}{j!} \langle v_{j+1} | L_j \rangle$$
$$= j\,\frac{(-1)^{j-1}}{(j-1)!}(-1)^j\, j! + \frac{(-1)^j}{j!}\binom{j+1}{j}(-1)^j\,(j+1)!$$
$$= -j^2 + (j+1)^2$$
$$= 2j+1.$$

d. $(L_k)_{0 \le k \le j+1}$ est une base orthonormée de F_{j+1},

On peut écrire $q_{j+1} = \sum_{k=0}^{j+1} \beta_k L_k$ où $\beta_i = \langle q_{j+1} | L_k \rangle$, $0 \le k \le j+1$.

Rappelons que

$\beta_k = \langle q_{j+1} | L_k \rangle = 0$, pour $k \le j-2$,

$$\beta_{j-1} = \langle tL_j | L_{j-1} \rangle = \sum_{\ell=0}^{j} \binom{j}{j-\ell} \frac{(-1)^\ell}{\ell!} \langle v_{\ell+1} | L_{j-1} \rangle = \sum_{\ell=j-1}^{j} \binom{j}{j-\ell} \frac{(-1)^\ell}{\ell!} \langle v_{\ell+1} | L_{j-1} \rangle = -j.$$

$\beta_j = 2j+1$.

$$\beta_{j+1} = \langle tL_j | L_{j+1} \rangle = \sum_{\ell=0}^{j} \binom{j}{j-\ell} \frac{(-1)^\ell}{\ell!} \langle v_{\ell+1} | L_{j+1} \rangle = \frac{(-1)^j}{j!} \langle v_{j+1} | L_{j+1} \rangle = -(j+1).$$

Ainsi, $t\,L_j(t) = -(j+1)L_{j+1}(t) + (2j+1)L_j(t) - j\,L_{j-1}(t)$.

9. a. Il est clair que $b_0 = a_0$. Supposons que $b_k = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{j+k} \binom{k}{j} a_j$.

$$b_{k+1} = a_{k+1} - \sum_{j=0}^{k} \binom{k+1}{j} b_j = a_{k+1} - \sum_{j=0}^{k} \binom{k+1}{j} \sum_{\ell=0}^{j} (-1)^{\ell+j} \binom{j}{\ell} a_\ell = a_{k+1} - \sum_{\ell=0}^{k} \sum_{j=\ell}^{k} \binom{k+1}{j} (-1)^{\ell+j} \binom{j}{\ell} a_\ell$$
$$= a_{k+1} - \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k+1}{\ell} a_\ell (-1)^\ell \sum_{j=\ell}^{k} \binom{k+1-\ell}{j-\ell} (-1)^j = a_{k+1} - \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k+1}{\ell} a_\ell \sum_{j=0}^{k-\ell} \binom{k+1-\ell}{j} (-1)^j$$
$$= a_{k+1} - \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k+1}{\ell} a_\ell \left[(1-1)^{k+1-\ell} - (-1)^{k+1-\ell} \right] = a_{k+1} + \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k+1}{\ell} (-1)^{k+1-\ell} a_\ell = \sum_{\ell=0}^{k+1} \binom{k+1}{\ell} (-1)^{k+1+\ell} a_\ell.$$

b. En écrivant $L_j = \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{j-k} b_k$ où $b_k = \frac{(-1)^k}{k!} v_k$, on obtient $\frac{t^k}{k!} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^j L_j(t)$.

Problème 2

1. f est périodique de période 2π telle que

$$f(t)=t,\ 0\le t < 2\pi\ .$$

a. Les coefficients de la série de Fourier de f sont donnés par

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{2\pi}=\pi\ ,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} t\cos(nt)dt=\frac{1}{\pi}\left(\left[\frac{t\sin(nt)}{n}\right]_0^{2\pi}-\frac{1}{n}\int_0^{2\pi}\sin(nt)dt\right)=0\text{, pour tout } n\ge 1\ ,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} t\sin(nt)dt=\frac{1}{\pi}\left(\left[\frac{-t\cos(nt)}{n}\right]_0^{2\pi}+\frac{1}{n}\int_0^{2\pi}\cos(nt)dt\right)=\frac{1}{\pi}\left(\left[\frac{-t\cos(nt)}{n}\right]_0^{2\pi}+\frac{1}{n^2}\left[-\sin(nt)\right]_0^{2\pi}\right.$$

$$=\frac{-2}{n},\ \ \text{n}\ge 1$$

La série de Fourier de f s'écrit

$$S(f)(t)=\pi-2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(nt)}{n}.$$

b. La fonction f étant continue en $\frac{\pi}{2}$, il vient que $S(f)\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$.

Or $\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)=\begin{cases}0, \text{ si } n=2k\\ (-1)^k, \text{ si } n=2k+1\end{cases}$

d'où $\pi-2\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}=\frac{\pi}{2}$, par suite

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac{\pi}{4}.$$

En appliquant l'égalité de Parseval, on obtient

$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f^2(t)dt=a_0^2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}b_n^2$, c'est-à-dire $\frac{1}{2\pi}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{2\pi}=\pi^2+2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$

d'où $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{\pi^2}{6}$

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^2}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}+\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+2)^2}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}+\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(k+1)^2}$$

d'où

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{3}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}.$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{2k}}{(2k+1)^2}+\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{2k+1}}{(2k+2)^2}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}-\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(k+1)^2}=\frac{\pi^2}{12}.$$

2. a. Pour $S(f)(t)=\pi-2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(nt)}{n}$.

La fonction f est continue sur $]0,\ 2\pi[$, il vient que $t=\pi-2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(nt)}{n}$, $t\in]0,2\pi[$.

Par suite en intégrant on peut écrire,

$$\frac{t^2}{2}+c=\pi t+2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(nt)}{n^2},\ t\in]0,2\pi[.$$

d'où pour tout réel t de $[0,\ 2\pi]$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(nt)}{n^2}=\frac{3t^2-6\pi t+2\pi^2}{12}$.

b. En appliquant l'égalité de Parseval, on obtient

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{3t^2-6\pi t}{12}\right)^2 dt=\left(-\frac{\pi^2}{6}\right)^2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4},$$

le calcul donne $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^4}=\frac{\pi^4}{90}$.

On en déduit que

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^4}=\frac{\pi^4}{96}\quad\text{et}\quad\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^4}=\frac{7\pi^4}{720}.$$

3. Soit $\beta>1$ et $h(x)=\frac{1}{(n+a)^x}$, $x\in[\beta,+\infty[$.

$0<\frac{1}{(n+a)^x}\le\frac{1}{(n+a)^\beta}$ et la série $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+a)^\beta}$ converge. On en déduit que la série $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+a)^x}$ converge pour tout $x>1$.

On pose

$$\zeta(x\ ,\ a)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+a)^x}\ \text{et}\ \zeta(x)=\zeta(x,\ 1).$$

4. Soit $\beta>1$ et $x\in[\beta,+\infty[$, on note $h(x)=\frac{1}{(n+a)^x}$, alors pour tout entier $k\ge1$,

$$\frac{d^k h}{dx^k}(x)=(-1)^k\,\frac{\ln^k(n+a)}{(n+a)^x},$$

$0<\frac{\ln^k(n+a)}{(n+a)^x}\le\frac{\ln^k(n+a)}{(n+a)^\beta}$ et la série $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\ln^k(n+a)}{(n+a)^\beta}$ converge.

On en déduit que la fonction $x \mapsto \zeta(x, a)$ est de classe C^k sur $]1, +\infty[$ pour tout entier naturel k. Ce qui prouve que la fonction $x \mapsto \zeta(x, a)$ est de classe C^∞ sur $]1, +\infty[$.

5. a. $\zeta(2) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et $\zeta(4) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

b. $\zeta\left(2, \frac{1}{2}\right) = 4\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{2}$ et $\zeta\left(4, \frac{1}{2}\right) = 16\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{6}$.

6. a. Pour tout entier naturel n et tout $t \in [n, n+1]$, $\frac{1}{(n+1+a)^x} \leq \int_n^{n+1} \frac{dt}{(t+a)^x} \leq \frac{1}{(n+a)^x}$

D'où $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1+a)^x} \leq \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t+a)^x} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+a)^x}$,

ou encore $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+a)^x} \leq \frac{1}{1-x}\left[(t+a)^{-x+1}\right]_0^{+\infty} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+a)^x}$

Par suite $\zeta(x, a) - \frac{1}{a^x} \leq \frac{1}{x-1} \cdot \frac{1}{a^{x-1}} \leq \zeta(x, a)$,

b. De la double inégalité $0 \leq \zeta(x, a) - \frac{1}{a^x} \leq \frac{1}{x-1} \cdot \frac{1}{a^{x-1}}$, on déduit que

$0 \leq a^x \zeta(x, a) - 1 \leq \frac{a}{x-1}$.

Par conséquent $\lim_{x \to +\infty} a^x \zeta(x, a) = 1$.

De l'inégalité $\frac{1}{x-1} \cdot \frac{1}{a^{x-1}} \leq \zeta(x, a)$, on déduit que $\frac{a}{x-1} \leq a^x \zeta(x, a)$.

Par suite $\lim_{x \to 1^+} a^x \zeta(x, a) = +\infty$.

c. On déduit de $\zeta(x, a) - \frac{1}{a^x} \leq \frac{1}{x-1} \cdot \frac{1}{a^{x-1}} \leq \zeta(x, a)$ que

$\frac{a}{x-1} \leq a^x \zeta(x, a) \leq \frac{a}{x-1} + 1$ et que $1 \leq a^{x-1}(x-1)\zeta(x, a) \leq 1 + \frac{x-1}{a}$.

Par conséquent $\zeta(x, a) \overset{1^+}{\sim} \frac{a^{1-x}}{x-1}$.

7. $\frac{u^{x-1}e^{-au}}{1-e^{-u}} e^{\frac{a}{2}u} = \frac{u^{x-1}e^{-\frac{a}{2}u}}{1-e^{-u}}$

$\lim_{u \to +\infty} e^{\frac{a}{2}u}\left(\frac{u^{x-1}e^{-au}}{1-e^{-u}}\right) = \lim_{u \to +\infty} \frac{u^{x-1}e^{-\frac{a}{2}u}}{1-e^{-u}} = 0$

Donc il existe A >0 tel que $\frac{u^{x-1}e^{-au}}{1-e^{-u}} \leq e^{-\frac{a}{2}u}$,u ≥ A ,

La convergence de $\int_1^{+\infty} e^{-\frac{a}{2}u} du$ implique que $\int_1^{+\infty} \frac{u^{x-1}e^{-au}}{1-e^{-u}} du$ converge.

On sait que $e^u \geq 1+u$, $u \geq 0$. Il en résulte que $0 \leq \frac{u^{x-1}e^{-au}}{1-e^{-u}} \leq Cu^{x-2}$, 0<u ≤ 1.

La convergence de $\int_0^1 u^{x-2}du$ converge $(x>1)$ implique que $\int_0^1 \frac{u^{x-1}e^{-au}}{1-e^{-u}}du$ converge.

Par conséquent $u \mapsto \frac{u^{x-1}e^{-au}}{1-e^{-u}}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

$$0 \le \frac{u^{x-1}e^{-(a+k+1)u}}{1-e^{-u}} = \frac{u^{x-1}e^{-(a+k)u}}{e^{u}-1} \text{ et } e^{u} \ge 1+u,\ u \ge 0.$$

Donc $0 \le \frac{u^{x-1}e^{-(a+k+1)u}}{1-e^{-u}} \le u^{x-2}e^{-(k+a)u}$.

L'égalité $\int_0^{+\infty} u^{x-2}e^{-(k+a)u}du = \frac{1}{(k+a)^{x-1}}\int_0^{+\infty} u^{x-2}e^{-u}du = \frac{\Gamma(x-1)}{(k+a)^{x-1}}$

implique que $u \mapsto \frac{u^{x-1}e^{-(a+k)u}}{1-e^{-u}}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

8. a. Pour tout entier naturel N,

$$\Gamma(x)\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{(n+a)^x} = \sum_{n=0}^{N}\int_0^{+\infty}\frac{u^{x-1}e^{-u}}{(n+a)^x}du = \sum_{n=0}^{N}\int_0^{+\infty}\left(\frac{u}{n+a}\right)^{x-1}\frac{e^{-u}}{(n+a)}du = \sum_{n=0}^{N}\int_0^{+\infty}u^{x-1}e^{-u(n+a)}du$$

$$= \int_0^{+\infty}u^{x-1}\sum_{n=0}^{N}e^{-u(n+a)}du = \int_0^{+\infty}u^{x-1}e^{-ua}\frac{1-e^{-u(N+1)}}{1-e^{-u}}du$$

$$= \int_0^{+\infty}\frac{u^{x-1}e^{-au}}{1-e^{-u}}du - \int_0^{+\infty}\frac{u^{x-1}e^{-(N+1+a)u}}{1-e^{-u}}du$$

b. On peut écrire $\frac{u^{x-1}e^{-(N+1+a)u}}{1-e^{-u}} = \frac{u^{x-1}e^{-(N+a)u}}{e^{u}-1}$.

De l'inégalité $e^{u} \ge 1+u,\ u \ge 0$, on déduit que $0 \le \frac{u^{x-1}e^{-(N+a)u}}{e^{u}-1} \le u^{x-2}e^{-(N+a)u}$.

Or $\int_0^{+\infty}u^{x-2}e^{-(N+a)u}du = \frac{1}{(N+a)^{x-1}}\int_0^{+\infty}u^{x-2}e^{-u}du = \frac{\Gamma(x-1)}{(N+a)^{x-1}}$.

Par conséquent $\lim_{N\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{u^{x-1}e^{-(N+1+a)u}}{1-e^{-u}}du = 0.$

c. D'après 7. a et 7. b, $\Gamma(x)\zeta(x, a) = \int_0^{+\infty}\frac{u^{x-1}e^{-au}}{1-e^{-u}}du, \quad 0<a\le 1 \quad \text{et} \quad x>1.$

d. $\int_0^{+\infty}\frac{ue^{u}}{e^{2u}-1}du = \int_0^{+\infty}\frac{ue^{-u}}{1-e^{-2u}}du = \frac{1}{4}\int_0^{+\infty}\frac{te^{-\frac{t}{2}}}{1-e^{-t}}dt = \frac{1}{4}\Gamma(2)\zeta\left(2, \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi^2}{8}.$

$$\int_0^{+\infty}\frac{u^3e^{u}}{e^{2u}-1}du = \int_0^{+\infty}\frac{u^3e^{-u}}{1-e^{-2u}}du = \frac{1}{16}\int_0^{+\infty}\frac{t^3e^{-\frac{t}{2}}}{1-e^{-t}}dt = \frac{1}{16}\Gamma(4)\zeta\left(4, \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi^4}{16}.$$