REPUBLIQUE TUNISIENNE
Ministère de l'Enseignement Supérieur, de La Recherche Scientifique et de La Technologie
Concours nationaux d'entrée aux cycles de formation d'ingénieurs
Session 2008

الجمهورية التونسية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي والتكنولوجيا
المناظرات الوطنية للدخول إلى مراحل تكوين المهندسين
دورة 2008

Concours Technologie
Epreuve de Mathématiques

Durée : 4 H Date : 2 Juin 2008 Heure : 8H Nb de pages : 4

Barème : Ex : 1pt. Pb1 : Partie 1 : 3.5pts - Partie 2 : 2.5pts - Partie 3 : 6pts. Pb2: 7pts.

Une grande importance sera attachée à la rigueur du raisonnement, à la clarté et au soin de la présentation. L'usage des calculatrices n'est pas autorisé.
Il est rappelé que tout résultat énoncé dans le texte peut être utilisé pour traiter la suite, même s'il n'a pu être démontré.

Exercice préliminaire

1. Montrer que la fonction $x \mapsto \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} u^{x-1} e^{-u} du$ est définie sur $]0, +\infty[$.
2. a. Montrer que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ pour tout réel $x > 0$.
   b. En déduire la valeur de $\Gamma(n+1)$, $n \in \mathbb{N}$.

On pourra utiliser les résultats de cet exercice dans toute la suite de l'épreuve.

Problème 1

Notations
Dans ce problème, on adopte les notations ci-dessous.
$C^0([0,+\infty[) = \{f : [0,+\infty[\to \mathbb{R} \; ; f \text{ continue}\}$.
$E = \{f \in C^0([0,+\infty[) \; ; t \mapsto f^2(t)e^{-t} \text{ intégrable sur } [0,+\infty[\}$.
F est l'ensemble des fonctions polynomiales restreintes à $[0,+\infty[$.
Pour tout entier naturel m, $F_m = \{P \in F \; ; \deg(P) \leq m\}$,
Pour tout entier naturel k, v_k est la fonction de F définie par $v_k : t \mapsto t^k$.
Pour tout endomorphisme u, on note $u^0 = id$ et $u^k = u^{k-1} \circ u$, pour tout entier $k \geq 1$.

Pour toute fonction $g \in F$ et tout entier naturel k, on note $\dfrac{d^k g}{dt^k}$ la dérivée d'ordre k de g, avec la convention $\dfrac{d^0 g}{dt^0} = g$ et $\dfrac{d^1 g}{dt^1} = \dfrac{dg}{dt}$.

Pour tout couple d'entiers naturels (j, ℓ) tel que $0 \leq \ell \leq j$, on note $\begin{pmatrix} j \\ \ell \end{pmatrix} = \dfrac{j!}{\ell!(j-\ell)!}$, avec la convention $0! = 1$.

Partie 1

Soit φ l'application linéaire qui à tout $P \in F$ associe la fonction polynomiale

$$\varphi(P) : t \mapsto t\frac{d^2 P}{dt^2}(t) + (-t+1)\frac{dP}{dt}(t).$$

1. Montrer que la restriction de φ à F_m est un endomorphisme que l'on notera φ_m.
2. Déterminer la matrice de φ_m dans la base canonique $B = (v_0, v_1, \ldots, v_m)$ de F_m.
3. En déduire les valeurs propres de φ_m et montrer qu'il est diagonalisable.

Dans toute la suite du problème, on désigne par $(L_j)_{j\geq 0}$ la suite des fonctions polynomiales de F définies par $L_j : t \mapsto \dfrac{1}{j!}e^t \dfrac{d^j}{dt^j}\left(t^j e^{-t}\right)$.

4. Montrer que $L_j(t) = \displaystyle\sum_{\ell=0}^{j} \begin{pmatrix} j \\ j-\ell \end{pmatrix} \frac{(-1)^\ell}{\ell!} t^\ell$.

5. Expliciter L_j pour $j = 0, 1, 2$ et 3.

6. Soit m un entier naturel.
   a. Montrer que pour tout entier $0 \leq j \leq m$, $\varphi_m(L_j) = -jL_j$.
   b. Montrer que $F_m = \displaystyle\bigoplus_{j=0}^{m} \mathbb{R}L_j$, où $\mathbb{R}L_j$ est la droite vectorielle engendrée par L_j.

Partie 2

1. Soit $f, g \in E$. Montrer que la fonction $t \mapsto f(t)g(t)e^{-t}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.
2. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $C^0([0, +\infty[)$.

Dans toute la suite du problème, on pose $\langle f | g \rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)g(t)e^{-t}dt$, pour tout $f, g \in E$.

3. Montrer que $\langle \ | \ \rangle$ est un produit scalaire sur E. On notera $\| \ \|$ la norme qui lui est associée.
4. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
5. Calculer $\langle v_j | v_k \rangle$ pour tout couple d'entiers naturels (j, k).

Partie 3

Soit u l'application linéaire qui à tout $P \in F$ associe $u(P) : t \mapsto e^t \frac{d}{dt}\left(P(t)e^{-t}\right)$.

1. Expliciter $u(P)$ à l'aide de P et $\frac{dP}{dt}$.

2. a. Montrer que pour tout entier naturel $j \geq 1$ et tout entier $0 \leq k \leq j-1$,

$$L_j(t) = \frac{1}{j!}e^t \frac{d^{j-k}}{dt^{j-k}}\left(u^k(v_j)(t)e^{-t}\right).$$

b. Montrer que pour tout entier naturel j, $L_j = \frac{1}{j!}u^j(v_j)$.

3. Montrer que pour tout $g, f \in F$, $\langle g | u(f) \rangle = -g(0)f(0) - \left\langle \frac{dg}{dt} \middle| f \right\rangle$.

4. a. Soit un entier $j \geq 1$. Montrer que pour tout entier $1 \leq k \leq j$, $u^{j-k}(v_j)(0) = 0$.

b. Montrer que pour tout $g \in F$ et tout entier naturel j, $\langle g | L_j \rangle = \frac{(-1)^j}{j!}\left\langle \frac{d^j g}{dt^j} \middle| v_j \right\rangle$

5. Montrer que pour tout couple d'entiers naturels distincts (j,k), $\langle L_j | L_k \rangle = 0$.

6. Expliciter $\langle v_j | L_k \rangle$ pour tout couple d'entiers naturels (j, k).

7. Montrer que pour tout entier naturel j, $\|L_j\|^2 = 1$.

8. Pour tout entier naturel k, on pose $q_{k+1} : t \mapsto tL_k(t)$.

a. Montrer que $\langle q_{j+1} | L_k \rangle = \langle L_j | q_{k+1} \rangle$, pour tout couple d'entiers naturels (j,k).

b. Soit un entier naturel $j \geq 2$. Montrer que tout entier $0 \leq k \leq j-2$, $\langle q_{j+1} | L_k \rangle = 0$.

c. Montrer que $\langle q_{j+1} | L_j \rangle = (2j+1)$.

d. Montrer la relation

$$tL_j(t) = -(j+1)L_{j+1}(t) + (2j+1)L_j(t) - jL_{j-1}(t).$$

9. Soit deux suites réelles $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

a. Montrer l'implication

$$a_k = \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}b_j \quad \Rightarrow \quad b_k = \sum_{j=0}^{k}(-1)^{j+k}\binom{k}{j}a_j$$

b. Montrer que $\frac{t^k}{k!} = \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^j L_j(t)$.

Problème 2

1. Soit f la fonction de la variable réelle t, périodique de période 2π et telle que

$$f(t)=t,\ 0\leq t<2\pi .$$

a. Déterminer la série de Fourier de f et donner sa somme pour tout réel t.

b. En déduire les valeurs de $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$, $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^2}$, $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$, $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}$.

2. a. Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(nt)}{n^2}=\frac{3t^2-6\pi t+2\pi^2}{12}$ pour tout réel t de $[0,\ 2\pi]$.

b. En déduire les valeurs de $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^4}$, $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^4}$, $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^4}$.

3. Soit $0<a\leq 1$. Montrer que la série $\sum_n\frac{1}{(n+a)^x}$ converge pour tout réel $x>1$.

Dans toute la suite du problème, on pose pour tous réels $0<a\leq 1$ et $x>1$,

$$\zeta(x\ ,\ a)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+a)^x}\quad\text{et}\quad \zeta(x)=\zeta(x,\ 1).$$

4. Montrer que la fonction $x\mapsto\zeta(x,a)$ est de classe C^∞ sur $]1,+\infty[$.

5. a. Donner les valeurs de $\zeta(2)$ et $\zeta(4)$.

b. Donner les valeurs de $\zeta\left(2,\frac{1}{2}\right)$ et $\zeta\left(4,\frac{1}{2}\right)$.

6. a. Montrer que $\zeta(x,a)-\frac{1}{a^x}\leq\frac{1}{x-1}\cdot\frac{1}{a^{x-1}}\leq\zeta(x,a)$.

b. En déduire $\lim_{x\to+\infty}a^x\zeta(x,a)$ et $\lim_{x\to 1^+}a^x\zeta(x,a)$

c. Donner un équivalent de $\zeta(x,a)$ quand $x\to 1^+$.

7. Montrer que pour tous réels $0<a\leq 1$, $x>1$ et tout entier naturel k, les fonctions

$u\mapsto\frac{u^{x-1}e^{-au}}{1-e^{-u}}$ et $u\mapsto\frac{u^{x-1}e^{-(a+k+1)u}}{1-e^{-u}}$ sont intégrables sur $]0,+\infty[$

8. a. Montrer que pour tout entier naturel N, et tous réels $0<a\leq 1$ et $x>1$,

$$\Gamma(x)\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{(n+a)^x}=\int_0^{+\infty}\frac{u^{x-1}e^{-au}}{1-e^{-u}}du-\int_0^{+\infty}\frac{u^{x-1}e^{-(N+1+a)u}}{1-e^{-u}}du.$$

b. Montrer que $\lim_{N\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{u^{x-1}e^{-(N+1+a)u}}{1-e^{-u}}du=0.$

c. En déduire que pour tous réels $0<a\leq 1$ et $x>1$, $\Gamma(x)\zeta(x,\ a)=\int_0^{+\infty}\frac{u^{x-1}e^{-au}}{1-e^{-u}}du$.

d. Justifier la convergence de chacune des intégrales $\int_0^{+\infty}\frac{ue^u}{e^{2u}-1}du$ et $\int_0^{+\infty}\frac{u^3e^u}{e^{2u}-1}du$ et donner leurs valeurs.