



Concours en Technologie
Epreuve de Mathématiques

Durée : 4 heures	Date : 3 Juin 2002	Heure : 8 H	Nb pages : 4
Barème : Exercice : 7 pts		Problème : 13 pts	

Une grande importance sera attachée la rigueur du raisonnement, la clarté et soin de la présentation. L'usage des calculatrices n'est pas autorisés.

Il est rappelé que tout résultat énoncé dans le texte peut être utilisé pour traiter la suite, même s'il n'a pu être démontré.

Exercice

1) Ecrire les développements en séries entière des fonctions

$$x \mapsto \log(1+x^2) \quad \text{et} \quad x \mapsto \arctan(x)$$

et préciser les rayons de convergence de ces développements.

2) On note pour tout entier n non nul :

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}.$$

On rappelle que : $\log(n) < S_n < 1 + \log(n)$.

2-a) Montrer que $S_{2n+2} < S_{2n} + \frac{2}{2n+1}$.

2-b) Montrer que la suite $v_n = \frac{S_{2n}}{2n+1}$ est décroissante.

2-c) En déduire la nature de la série de terme général $u_n = (-1)^{n-1} \frac{S_{2n}}{2n+1}$.

3)

3-a) Montrer que le rayon de convergence de la série entière

$$\sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} S_{2n} x^{2n}$$

est égal 1.

3-b) Pour $x \in]-1, 1[$, on pose :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} S_{2n} x^{2n} \quad \text{et} \quad g(x) = (1+x^2)f(x).$$

Montrer que :

$$g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n} x^{2n}.$$

3-c) En déduire que :

$$g(x) = x \arctan(x) + \frac{1}{2} \log(1+x^2) \quad \text{et que} \quad f(x) = \frac{1}{2} \left[\frac{2x}{1+x^2} \arctan(x) + \frac{1}{1+x^2} \log(1+x^2) \right].$$

4) Montrer que pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt = \frac{1}{2} \arctan(x) \log(1+x^2).$$

5) Ecrire le développement en série entière de F . En déduire la valeur de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{S_{2n}}{2n+1}.$$

Problème

Partie 1

Soit φ une fonction définie et continue sur $[-1, 1]$, à valeurs dans \mathbb{R} . On pose pour tout entier $n \geq 0$:

$$\begin{aligned} f_n &: [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \cos(n\varphi(x)). \end{aligned}$$

1) Vérifier les relations de récurrences suivantes : $\forall x \in [-1, 1], \forall n \geq 1$:

$$f_{n+1}(x) + f_{n-1}(x) = 2 \cos(\varphi(x)) f_n(x).$$

2) Plus généralement vérifier que : $\forall x \in [-1, 1], \forall m \geq n$:

$$f_{m+n}(x) + f_{m-n}(x) = 2 f_m(x) f_n(x).$$

Dans la suite du problème, on pose $\varphi(x) = \arccos(x)$, et on désigne par T_n l'application :

$$\begin{aligned} T_n &: [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \cos(n \arccos(x)). \end{aligned}$$

3) Montrer que pour tout $x \in [-1, 1]$ et pour tout entier $n \geq 0$:

$$e^{in \arccos(x)} = \sum_{k=0}^n C_n^k i^k (\sqrt{1-x^2})^k x^{n-k}.$$

4) En déduire que pour tout entier $n \geq 0$, T_n est une fonction polynôme définie pour tout $x \in [-1, 1]$ par :

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{E(\frac{n}{2})} C_n^{2k} (x^2 - 1)^k x^{n-2k} \quad \text{où } E(\frac{n}{2}) \text{ désigne la partie entière de } \frac{n}{2}.$$

5) Déterminer le degré et la parité de T_n .

Partie 2

Pour tout entier $n \geq 2$, et $x \in [-1, 1]$, on pose :

$$M_n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad V_n(x) = \begin{pmatrix} T_0(x) \\ T_1(x) \\ T_2(x) \\ \vdots \\ T_{n-2}(x) \\ T_{n-1}(x) \end{pmatrix}$$

1) Vérifier les relations de récurrence suivantes : $\forall x \in [-1, 1], \forall n \geq 1$:

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2xT_n(x).$$

Préciser $T_0(x)$ et $T_1(x)$.

2) Calculer le produit $(M_n - xI_n)V_n(x)$, où I_n est l'identité de $M_n(\mathbb{R})$.

3) Soit $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, montrer que $x_{k,n} = \cos(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n})$ est une racine de T_n .

En déduire toutes les racines de T_n .

4) Montrer que pour tout $0 \leq k \leq n-1$,

$$(M_n - x_{k,n}I_n)V_n(x_{k,n}) = 0.$$

5) Montrer que les valeurs propres de M_n sont les n racines de T_n .

Quels sont les vecteurs propres associés ?

6) Montrer que la matrice M_n est diagonalisable.

Partie 3

On désigne par E l'espace vectoriel des applications continues sur $[-1, 1]$ à valeurs dans \mathbb{R} .

On munit E du produit scalaire \langle, \rangle , défini par :

$$\langle, \rangle : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(\bar{f}, g) \longmapsto \langle f, g \rangle = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

1) Vérifier que pour tout $f, g \in E$,

$$\langle \bar{f}, g \rangle = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(\cos(\theta))g(\cos(\theta))d\theta.$$

2) Prouver que les T_n sont orthogonaux deux à deux.

Montrer que

$$\forall n \geq 1, \langle T_n, T_n \rangle = 1 \text{ et } \langle T_0, T_0 \rangle = 2.$$

3) En déduire que (T_0, T_1, \dots, T_n) forme une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.

Soit $f \in E$, pour tout entier $N \geq 1$, on note :

$$S_N(f) = \frac{1}{2} \langle f, T_0 \rangle + \sum_{n=1}^N \langle f, T_n \rangle T_n$$

et soit g l'application paire définie sur \mathbb{R} par $g(\theta) = f(\cos(\theta))$.

4) Montrer que pour tout entier n ,

$$a_n(g) = \langle f, T_n \rangle, \text{ où } a_n(g) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi g(\theta) \cos(n\theta) d\theta.$$

5) Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et $N \geq 1$, on a :

$$\frac{1}{2}a_0(g) + \sum_{n=1}^N a_n(g) \cos(n\theta) = S_N(f)(\cos(\theta)).$$

6) Montrer que si f est continue et de classe C^1 par morceaux sur $[-1, 1]$, alors la série $\frac{1}{2} \langle f, T_0 \rangle + \sum_{n \geq 1} \langle f, T_n \rangle T_n$ converge normalement sur $[-1, 1]$ et que :

$$\frac{1}{2} \langle f, T_0 \rangle + \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, T_n \rangle T_n = f.$$

7) Réciproquement, on suppose que $\sum_{n \geq 0} \alpha_n$ est absolument convergente,

7-a) Montrer que la série de fonctions $\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n \geq 1} \alpha_n T_n$ converge normalement sur $[-1, 1]$.

7-b) Montrer que si f est sa somme, alors, $\forall n \geq 0, \alpha_n = \langle f, T_n \rangle$.

Partie 4

Soit h l'application définie par :

$$h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\theta \longmapsto |\sin(\theta)|$$

- 1) Vérifier que h est paire et 2π -périodique et tracer son graphe.
- 2) Déterminer la série de Fourier de h .
- 3) Étudier la convergence de la série de Fourier de h sur \mathbb{R} .
- 4) En déduire que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$h(\theta) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-4n^2} \cos(2n\theta).$$

5) Montrer que pour tout $x \in [-1, 1]$,

$$\sqrt{1-x^2} = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-4n^2} T_{2n}(x).$$

6) Trouver la valeur de la somme $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$.

7) Montrer que :

$$\langle \sqrt{1-x^2}, T_n \rangle = \begin{cases} \frac{4}{\pi} \frac{1}{1-4p^2} & \text{si } n = 2p \\ 0 & \text{si } n = 2p+1 \end{cases}$$