Exercice (7 → 35)

1) (4)

$\log(1+x^2) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{n}$, le rayon de convergence est 1.

$\arctan(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$, le rayon de convergence est 1.

2) (2 + 4 + 4)

2-a) $S_{2n+2} = S_{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} < S_{2n} + \frac{2}{2n+1}$.

2-b)

$$v_{n+1} - v_n = \frac{S_{2n+2}}{2n+3} - \frac{S_{2n}}{2n+1}$$

$$\leq \frac{S_{2n}}{2n+3} + \frac{2}{(2n+1)(2n+3)} - \frac{S_{2n}}{2n+1}$$

$$\leq \frac{2}{(2n+1)(2n+3)}(1 - S_{2n}) \leq 0$$

d'où la suite v_n est décroissante.

2-c) $|u_n| = (-1)^{n-1}u_n$, la série est alors alternée.

$|u_n|$ est une suite décroissante.

$\frac{\log(2n)}{2n+1} \leq \frac{S_{2n}}{2n+1} \leq \frac{1+\log(2n)}{2n+1}$, montre que $|u_n|$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

T.S.A. montre alors que la série est convergente.

3) (3 + 4 + 4)

3-a) Soit $a_n = (-1)^{n-1}S_{2n}$ on a $\lim_{n\to+\infty}|\frac{a_{n-1}}{a_n}| = 1$, le rayon de convergence de la série est alors égal à $\sqrt{1} = 1$.

3-b)

$$g(x) = (1+x^2)\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}S_{2n}x^{2n}$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}S_{2n}x^{2n} + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}S_{2n}x^{2n+2}$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}S_{2n}x^{2n} + \sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^{n}S_{2n-2}x^{2n}$$

$$= S_2x^2 + \sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^{n-1}(S_{2n} - S_{2n-2}).x^{2n}$$

$$= S_2x^2 + \sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^{n-1}(\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n-1}).x^{2n}$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n} x^{2n} .$$

3-c)

$$g(x) = x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^{2n} .$$

$$= x \arctan(x) + \frac{1}{2} \log(1+x^2)$$

En déduire que

$$f(x) = \frac{1}{2}\Big[\frac{2x}{1+x^2} \arctan(x) + \frac{1}{1+x^2} \log(1+x^2)\Big] .$$

4) (4)

$$\int_0^x f(t)dt = \int_0^x \frac{1}{2}\Big[\frac{2x}{1+t^2} \arctan(t) + \frac{1}{1+t^2} \log(1+t^2)\Big]dt$$

$$= \Big[\frac{1}{2} \arctan(t) \log(1+t^2)\Big]_0^x = \frac{1}{2} \arctan(x) \log(1+x^2).$$

5) (6)

$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}S_{2n}x^{2n}$ et F est la primitive de f qui s'annule en 0, d'où pour tout $x \in]-1,1[$

$$F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1} \frac{S_{2n}}{2n+1} x^{2n+1}.$$

On a, pour tout $x \in]-1,1[$

$$F(x) = \frac{1}{2} \arctan(x) \log(1+x^2)$$

d'où la fonction F est prolongeable par continuité sur $[-1,1]$, et on a :

$$\lim_{x \longrightarrow 1} \frac{1}{2} \arctan(x) \log(1+x^2) = \lim_{x \longrightarrow 1} \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1} \frac{S_{2n}}{2n+1} x^{2n+1}.$$

D'autre part pour tout $x \in [0,1]$ la série $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1} \frac{S_{2n}}{2n+1} x^{2n+1}$ vérifie les hypothèses du théorème des séries alternées donc elle converge simplement sur $[0,1]$ et

$$\sup_{x\in[0,1]} \Big| \sum_{n=N+1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{S_{2n}}{2n+1} x^{2n+1}\Big| \leq \frac{S_{2N+2}}{2N+3} \longrightarrow 0$$

d'où la convergence uniforme de $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1} \frac{S_{2n}}{2n+1} x^{2n+1}$ sur $[0,1]$.
En plus, $\forall n \geq 1$,

$$\lim_{x \longrightarrow 1} (-1)^{n-1} \frac{S_{2n}}{2n+1} x^{2n-1} = (-1)^{n-1} \frac{S_{2n}}{2n+1}$$

T.D.L. montre que

$$\lim_{x\longrightarrow 1}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{S_{2n}}{2n+1}x^{2n+1}=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{S_{2n}}{2n+1}.$$

Ainsi

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{S_{2n}}{2n+1}=\frac{1}{2}\arctan(1)\log(1+1^2)=\frac{\pi}{8}\log(2).$$

Exercice (7 → 35)

1) (3 + 3)

1-a) $a_{n+1} - a_n = -a_n^2 \leq 0$, la suite est décroissante.
on a $0 < a_0 < 1$. Supposons que $0 < a_n < 1$, on a alors $0 < 1 - a_n < 1$ et $0 < a_n(1 - a_n) = a_{n+1} < 1$. Ainsi pour tout $n \geq 0$, $0 < a_n < 1$.
1-b) (a_n) est décroissante minorée par 0 donc convergente. Sa limite l vérifie $l = l - l^2$ donc $l = 0$.

2) (4 + 5)

2-a) $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k^2 = \sum_{k=0}^{n} a_k - a_{k+1} = a_0 - a_{n+1} \longrightarrow a_0$.

La série $\sum_{n\geq 0} a_n^2$ est alors convergente, et $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2 = a_0$.

2-b) $\log(a_{n+1}) = \log(a_n - a_n^2) = \log(a_n) + \log(1 - a_n) \Longrightarrow$

$$\forall n \geq 0, \log(1 - a_n) = \log(a_{n+1}) - \log(a_n).$$

$\sum_{k=0}^{n} \log(1 - a_k) = \sum_{k=0}^{n} \log(a_{k+1}) - \log(a_k) = \log(a_{n+1}) - \log(a_0) \longrightarrow -\infty$,
la série $\sum_{n\geq 0} \log(1 - a_n)$ est alors divergente.
D'autre part $\log(1 - a_n) \sim -a_n$, donc la série $\sum_{n\geq 0} a_n$ est divergente.

3) (4)

$\forall x \in \mathbb{R}$, $|\frac{a_n}{n!} e^{-x} x^n| \leq e^{-x} \frac{|x|^n}{n!}$ qui est le terme général d'une série convergente, d'où $\sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n!} e^{-x} x^n$ converge absolument pour tout x réel.

4) (6)

La suite (a_n) étant décroissante et $x \geq 0$, on a alors :

$$0 \leq G(x) - G_N(x) = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} e^{-x} x^n \leq a_{N+1} e^{-x} \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \leq a_{N+1}.$$

En déduire que $\sup_{x\in[0,+\infty[} |G(x) - G_N(x)| \leq a_{N+1} \longrightarrow_{N\to\infty} 0$ et $\sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n!} e^{-x} x^n$ C.U. sur $[0, 1]$.
On a en plus $\lim_{x\to+\infty} \frac{a_n}{n!} e^{-x} x^n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
T.D.L. montre que $\lim_{x\to+\infty} G(x) = 0$.

5) (4)

On a $\lim_{t\longrightarrow+\infty} t^2e^{(s-1)t} = 0$ et $\lim_{t\longrightarrow+\infty} G(st) = 0$ d'où $\lim_{t\longrightarrow+\infty} t^2e^{(s-1)t}G(st) = 0$.
En plus le théorème de continuité montre que G est continue sur $[0, +\infty[$.
D'où l'application $t \longrightarrow e^{(s-1)t}G(st)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

6) (6)

$$\int_0^{+\infty} e^{(s-1)t}G(st)dt = \int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{n!}e^{-t}s^nt^ndt$$

Le théorème de permutation série intégrale donne alors :

$$\int_0^{+\infty} e^{(s-1)t}G(st)dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{n!}s^n\int_0^{+\infty} e^{-t}t^ndt = \sum_{n=0}^{+\infty}a_ns^n.$$

Problème $13 \to 65$

Partie 1 (13)

1) (2)

L'égalité $\cos((n+1)\theta)+\cos((n-1)\theta)=2\cos(\theta)\cos(n\theta)$ donne :

$$f_{n+1}(x)+f_{n-1}(x)=2\cos(\varphi(x))f_n(x).$$

2) (2)

L'égalité $\cos((m+n)\theta)+\cos((m-n)\theta)=2\cos(m\theta)\cos(n\theta)$ fournit la relation :

$$f_{m+n}(x)+f_{m-n}(x)=2f_m(x)f_n(x).$$

3) (3)

Pour tout $x\in[-1,1]$, on a $\cos(\arccos(x))=x$ et $\sin(\arccos(x))=\sqrt{1-x^2}$, d'où :

$$e^{in\arccos(x)}=(x+i\sqrt{1-x^2})^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k i^k(\sqrt{1-x^2})^k x^{n-k}.$$

4) (3)

$$T_n(x)=R\acute{e}(e^{in\arccos(x)})=R\acute{e}(\sum_{k=0}^{n}C_n^k i^k(\sqrt{1-x^2})^k x^{n-k})=\sum_{k=0}^{E(\frac{n}{2})}C_n^{2k}(x^2-1)^k x^{n-2k}.$$

5) (3)

T_n est un polynôme de degré n qui possède la parité de n.

Partie 2 (17)

1) (3)

La question 1) de la partie I donne :

$$T_{n+1}(x)+T_{n-1}(x)=2xT_n(x).$$

$T_0(x)=\cos(0)=1$, et $T_1(x)=\cos(\arccos(x))=x$.

2) (3)

$$(M_n - xI_n)V_n(x) = \begin{pmatrix} -xT_0(x) + T_1(x) \\ \frac{1}{2}T_0(x) - xT_1(x) + \frac{1}{2}T_2(x) \\ \frac{1}{2}T_1(x) - xT_2(x) + \frac{1}{2}T_3(x) \\ \vdots \\ \frac{1}{2}T_{n-3}(x) - xT_{n-2}(x) + \frac{1}{2}T_{n-1}(x) \\ \frac{1}{2}T_{n-2}(x) - xT_{n-1}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\frac{1}{2}T_n(x) \end{pmatrix}$$

3) (3)

$T_n(x_{k,n}) = \cos(\frac{\pi}{2} + k\pi) = 0, \implies x_{k,n}$ est une racine de T_n.
Les $(x_{k,n})_{0\leq k\leq n-1}$ forment n racines deux à deux distinctes du polynôme T_n de degré n, ça fournit donc toutes les racines de T_n.

4) (2)

$$(M_n - x_{k,n}I_n)V_n(x_{k,n}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\frac{1}{2}T_n(x_{k,n}) \end{pmatrix} = o.$$

5) (4)

Pour tout $0 \leq k \leq n-1$, $V_n(x_{k,n}) \neq 0$. Les $(x_{k,n})_{0\leq k\leq n-1}$ forment alors n valeurs propres de la matrice M_n, ça fournit donc toutes les valeurs propres de M_n.
$V_n(x_{k,n})$ est le vecteur propre associé à la valeur propre $x_{k,n}$.

6) (2)

La matrice M_n admet n valeurs propres deux à deux distinctes, donc diagonalisable.

Partie 3

(19)

1) (2)

On fait le changement de variable $\theta = \arccos(x)$ on obtient :

$$< f, g > = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(\cos(\theta))g(\cos(\theta))d\theta \ .$$

2) (3)

Pour $m \neq n$,

$$< T_m, T_n > = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} T_m(\cos(\theta))T_n(\cos(\theta))d\theta = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(m\theta)\cos(n\theta)d\theta = 0.$$

Pour $n \geq 1$,

$$< T_n, T_n > = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} T_n(\cos(\theta))T_n(\cos(\theta))d\theta = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (\cos(n\theta))^2 d\theta = 1.$$

Pour $n = 0$,

$$< T_0, T_0 >= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 1 d\theta = 2.$$

3) (2)

$(T_0, T_1, ..., T_n)$ forme une famille de $n+1$ vecteurs de $\mathbb{R}_n[X]$ deux à deux orthogonaux, donc c'est une base.

4) (2)

$$a_n(g) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g(\theta)\cos(n\theta)d\theta = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(\cos(\theta))T_n(\cos(\theta))d\theta =< f, T_n > .$$

5) (2)

$$\frac{1}{2}a_0(g)+\sum_{n=1}^{N} a_n(g)\cos(n\theta) = \frac{1}{2} < f, T_0 > + \sum_{n=1}^{N} < f, T_n > T_n(\cos(\theta)) = S_N(f)(\cos(\theta)) .$$

6) (3)

Si f est continue et C^1 par morceaux sur $[-1, 1]$, il en est de même de $g : \theta \longrightarrow f(\cos(\theta))$ sur $\mathbb{R}$.
On en déduit que la série de Fourier de g converge normalement vers g sur $\mathbb{R}$, ce qui entraine la convergence absolue de $\sum_{n\geq 1} a_n(g)$.
D'autre part, $| < f, T_n > T_n(x)| \leq | < f, T_n > | = |a_n(g)|$.
Il s'ensuit que la série $\sum_{n\geq 1} < f, T_n > T_n$ converge normalement sur $[-1, 1]$.
Enfin on a pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\frac{1}{2}a_0(g) + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(g)\cos(n\theta) = g(\theta) = f(\cos(\theta))$$

tout $x \in [-1, 1]$.

$$\frac{1}{2} < f, T_0 > + \sum_{n=1}^{+\infty} < f, T_n > T_n(x) = f(x).$$

(2 + 3)

On a

$$\sup_{x \in [-1,1]} |\alpha_n T_n(x)| \leq |\alpha_n|$$

e $\sum_{n \geq 1} |\alpha_n|$ est convergente donc la série $\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n T_n$ converge normale- sur $[-1, 1]$.

b) Soit $f = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n T_n$ Pour tout entier n :

$$< f, T_n >= \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} (\frac{\alpha_0}{2} \frac{T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} + \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k \frac{T_k(x) T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}) dx$$

$$= \frac{\alpha_0}{2} < T_0, T_n > + \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k \frac{T_k(x) T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

n pose $h_k(x) = \alpha_k \frac{T_k(x) T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}$.

h_k est intégrable sur $]-1, 1[$.

$\sum_{k \geq 1} h_k$ converge simplement sur $]-1, 1[$.

$\sum_{k=1}^{+\infty} h_k$ est continue sur $]-1, 1[$.

$\int_{-1}^{1} |h_k(x)| dx \leq \pi |\alpha_k|$. La série $\sum_{k \geq 1} \int_{-1}^{1} |h_k(x)| dx$ est alors convergente.

Le théorème de permutation somme intégrale donne alors :

$$< f, T_n >= \frac{\alpha_0}{2} < T_0, T_n > + \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k < T_k, T_n >= \alpha_n$$