Concours Physique et Chimie

Epreuve de Mathématiques

Partie I

Le but de cette partie est de calculer les intégrales $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\,dt$ et $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$.

Soit la fonction

$$h(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt}\frac{\sin^2 t}{t^2}\,dt.$$

1. On pose $H(x,t) = e^{-xt}\frac{\sin^2 t}{t^2}$ sur $[0,+\infty[\times]0,+\infty[$.
   H est continue sur $[0,+\infty[\times]0,+\infty[$ et on a

   $$|H(x,t)| \leq \frac{\sin^2 t}{t^2}, \quad \forall (x,t) \in [0,+\infty[\times]0,+\infty[.$$

   De même $\frac{\sin^2 t}{t^2} \sim 1$ au voisinage de 0 et $\frac{\sin^2 t}{t^2} \leq \frac{1}{t^2}$ au voisinage de $+\infty$.
   Donc $\phi : t \longmapsto \frac{\sin^2 t}{t^2}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$, d'où h est bien définie et continue sur $[0,+\infty[$.

2. (a) La fonction $x \longmapsto e^{-xt}\frac{\sin^2 t}{t^2}$ est deux fois dérivable donc la fonction H admet deux dérivées partielles $\frac{\partial H}{\partial x}$ et $\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}$ avec $\frac{\partial H}{\partial x} = -e^{-xt}\frac{\sin^2 t}{t}$ et $\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = e^{-xt}\sin^2 t$.
   Pour $a > 0$ et $x \geq a$, $|\frac{\partial H}{\partial x}(x,t)| = |e^{-xt}\frac{\sin^2 t}{t}| \leq |e^{-at}\frac{\sin^2 t}{t}| = \psi_1(t)$ et $|\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(x,t)| = |e^{-xt}\sin^2 t| \leq |e^{-at}\sin^2 t| = \psi_2(t)$ avec ψ_1 et ψ_2 sont intégrables sur $]0,+\infty[$. Par domination sur tout compact h est de classe C^2 sur $]0,+\infty[$, et

   $$h''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(x,t)dt$$

   $$h(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt}\frac{\sin^2 t}{t^2}\,dt$$

   $$\begin{aligned} h''(x) &= \textstyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}\sin^2 t\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-xt}\frac{1-\cos(2t)}{2}\,dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-xt}\,dt - \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-xt}\cos(2t)\,dt \\ &= \frac{1}{2x} - \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-xt}\cos(2t)\,dt \end{aligned}$$

   (b) Deux intégrations par parties donnent, pour tout $x > 0$,

   $$\int_0^{+\infty} e^{-xt}\cos(2t)\,dt = \frac{x}{x^2+4}.$$

   (c) Intégrer $h''(x)$ donne, pour tout $x > 0$,

   $$h'(x) = \frac{1}{2}\ln x - \frac{1}{4}\ln(x^2+4) + c.$$

   Comme $\lim_{x\to+\infty} h'(x) = 0$, nous obtenons $c = 0$.

(d) De même intégrer $h'(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} h(x) = 0$, pour tout $x > 0$,

$$h(x) = \frac{x}{4}\ln\frac{x^2}{x^2+4} - \arctan(\frac{x}{2}) + \frac{\pi}{2}.$$

(a) h est continue en 0 , $\lim_{x\to 0} h(x) = h(0)$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\,dt = \frac{\pi}{2}.$$

(b) Intégration par partie sur $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\,dt.$
On pose $u = \sin^2 t$ et $v' = \frac{1}{t^2}$

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\,dt = &\ [-\frac{\sin^2 t}{t}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{\sin(2t)}{t}\,dt \\ &\int_0^{+\infty} \frac{\sin z}{z}\,dz.\end{aligned}$$

avec $z = 2t$.

Partie II

Le but de cette partie est de calculer entre autres les sommmes suivantes: $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{\sin n}{n}\right)^2$ e $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin n}{n}$.

1. Soit φ la fonction de la variable réelle t, 2π-périodique et telle que:

$$\forall t \in [-\pi,\pi[,\ \ \varphi(t) = \frac{\pi}{2} - |t|.$$

On note $S_\varphi(t)$ la série de Fourier de φ.

(a) φ est 2π périodique et $\forall t \in [-\pi,\pi[,\ \ \varphi(t) = \frac{\pi}{2} - |t|$. φ est C^1 par morceaux sur $[-\pi,\pi$
φ est continue en π^- et en π^+. $\varphi(\pi^-) = \varphi(\pi^+) = \varphi(\pi)$.
Donc φ est continue sur $[-\pi,\pi]$ et par période sur $\mathbb{R}$. Sur $[0,\pi[$ $\varphi'(x) = 1$ et adme une limite en π^-.
Donc φ est C^1 par meoceuax sur $\mathbb{R}$.
En utilisant le théorème de Dirichlet on a $\varphi(t) = S_\varphi(t)$.

(b) Comme φ est paire $b_n(\varphi) = 0$. $a_0(\varphi) = 0$ et

$$a_n(\varphi) = \left\{\begin{array}{cc} 0 & \text{si}\, n = 2k \\ \frac{4}{\pi(2k-1)^2} & \text{si } n = 2k-1 \end{array}\right.$$

(c) D'où

$$S_\varphi(t) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4\cos((2k-1)t)}{\pi(2k-1)^2}.$$

2. i) $t=0$

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

ii)

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k)^2}+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

iii)

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=-\frac{\pi^2}{12}$$

3. i) Théorème de Parseval

$$\frac{a_0(\varphi)}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2(\varphi)+b_n^2(\varphi))=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)^2dt$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k-1)^4}=\frac{\pi^4}{96}$$

ii)

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k-1)^4}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k)^4}=\frac{\pi^4}{90}.$$

4. On note $\Phi(x)=\displaystyle\int_0^x\varphi(t)dt$ telle que $\Phi(0)=0$.

   (a) $\Phi(-x)=\displaystyle\int_0^{-x}\varphi(t)dt=\int_0^x\varphi(-t)(-dt)=-\int_0^x\varphi(t)dt=-\Phi(x)$ et

   $$\Phi(x+2\pi)=\int_0^{x+2\pi}\varphi(t)dt=\Phi(x)+\int_x^{x+2\pi}\varphi(t)dt$$

   φ étant 2π périodique donc

   $$\int_x^{x+2\pi}\varphi(t)dt=\int_0^{2\pi}\varphi(t)dt=\pi a_0(\varphi)=0.$$

   . D'où $\Phi(x+2\pi)=\Phi(x)$.

   (b) φ étant continue 2π périodique C^1 par morceaux donc la série de Fourier de φ converge normalement vers φ. On a une série de fonctions continues qui converge normalement on peut l'intégrer terme à terme

   $$\varphi(t)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4\cos((2k-1)t)}{\pi(2k-1)^2}.$$

   ce qui donne

   $$\Phi(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4\sin((2k-1)x)}{\pi(2k-1)^3}$$

   Cette série converge normalement donc sa somme est développable en série de Fourier et les coefficients de Fourier de Φ sont $a_n(\Phi)=0, b_{2k}(\Phi)=0$ et $b_{2k+1}(\Phi)=\dfrac{4}{\pi(2k-1)^3}$.

(c) i) Parseval appliqué à Φ donne

$$\frac{16}{\pi^2}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k-1)^6}=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \Psi^2(t)dt$$

on a $\forall x \in [0,\pi[,\ \Phi(x)=\displaystyle\int_0^\pi (\frac{2}{\pi}-t)dt=\frac{2}{\pi}x-\frac{x^2}{2}$. D'où $\displaystyle\int_0^\pi \Psi^2(t)dt=\frac{\pi^5}{120}$ ce qui donne

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k-1)^6}=\frac{\pi^6}{960}$$

ii) De même que 2) ii)

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^6}=\frac{\pi^6}{945}.$$

5. Soit f la fonction d'une variable réelle, 2π-périodique, impaire et telle que, pour tout $t \in]0,\pi]$, on a:

$$f(t)=\frac{\pi-t}{2}.$$

   (a) Comme f est impaire on a $f(0)=0$ et $a_n(f)=0$, $b_n(f)=\frac{1}{n}$.

   (b) $S_f(t)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(nt)}{n}$.

6. f n'est pas continue sur $\mathbb{R}$ mais continue par morceaux $S_f(t)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(nt)}{n}=\frac{f(t^+)+f(t^-)}{2}$
Au point 1 f est continue et $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{\sin n}{n}$ est convergente et que

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin n}{n}=f(1)=\frac{\pi-1}{2}.$$

7. On considère la fonction g, 2π-périodique, impaire et définie sur $]0,\pi]$ par:

$$g(t)=\begin{cases} tf(1) & \text{si } t\in]0,1], \\ f(t) & \text{si } t\in[1,\pi]. \end{cases}$$

   (a) $a_n(g)$ et $b_n(g)$. La fonction g est 2π périodique sur $\mathbb{R}$ et C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$, $a_n(g)=0$ car g est impaire et $b_n(g)=\dfrac{\sin(n)}{n^2}$.

   (b) d'où

$$S_g(t)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(n)}{n^2}\sin(nt).$$

   (c) g étant continue 2π périodique C^1 par morceaux donc la série de Fourier de g converge normalement vers g.

   (d) En utilisant Dirichlet et le fait que $g(1)=f(1)$ on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{\sin n}{n}\right)^2=\frac{\pi-1}{2}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin n}{n}.$$

(e) En utilsant Parseval $\dfrac{a_0(g)^2}{4}+\dfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n(g)^2+b_n(g)^2)=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g^2(t)dt=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{\cos n}{n}\right)^2$.

8. Calculer les sommes suivantes:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin^2 n}{n^4}=\frac{(\pi-1)^2}{6}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos^2 n}{n^4}=\frac{\pi^4}{96}-\frac{(\pi-1)^2}{6}.$$

Partie III

- On note par $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n.
- Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit qu'une matrice R de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une racine carrée de A si $R^2 = A$.
- On note par $Rac(A)$ l'ensemble des racines carrées de A.

Le problème propose de déterminer les racines carrées de A dans différents cas.

1. **Cas où A possède n valeurs propres distinctes.**
On suppose que la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admet n valeurs propres réelles $\lambda_1 < \lambda_2 < .... < \lambda_n$.

(a)
- A admet n valeurs propres distinctes don elle est diagonalisable et semblable à une matrice diagonale. D'où l'existence d'une matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible telle que $A = PDP^{-1}$ où $D = diag(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$.
- Soit R une racine carrée de A et $S = P^{-1}RP$. Comme $R^2 = A \Leftrightarrow S^2 = P^{-1}R^2P = D \Leftrightarrow S^2 = D$.

(b) Racines carrées de D. Soit S une racine carrée de D.
i) $SD = S^3 = DS$. Posons $S = (S_{ij})$. Comme $SD = DS$ on a $\lambda_i S_{ij} = S_{ij}\lambda_j$ et donc pour $i \neq j$, $S_{ij} = 0$ car $\lambda_i \neq \lambda_j$ d'où la matrice S est diagonale.

2i) On a alors $S^2 = diag(s_1^2, \cdots, s_n^2) = diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$. d'où $\forall i, s_i^2 = \lambda_i$.

3i)Si $\lambda_1 < 0, i = 1$, $s_1^2 = \lambda_1$ n'a pas de solution donc $Rac(A) = \emptyset$

4i) Si on suppose que toutes les valeurs propres de A sont positives ou nulles alors $\lambda_1 \geq 0 \Rightarrow \lambda_i > 0$, $\forall i \geq 2$.
Les racines carrées de la matrice D:

$$Rac(D) = \{diag(\varepsilon_1\sqrt{\lambda_1}, \cdots, \varepsilon_n\sqrt{\lambda_n}), \varepsilon_i \in \{-1, 1\}\}$$

(c) On utilise R racine carrée de A ssi $S = P^{-1}RP$ racine de D.
Si $\lambda_1 < 0$, $Rac(D) = \emptyset \Rightarrow Rac(A) = \emptyset$.
Si $\lambda_1 > 0$ une racine carrée de D est connue par le choix de $\varepsilon_i = 1$ ou -1,

$$Rac(A) = \{Pdiag(\varepsilon_1\sqrt{\lambda_1}, \cdots, \varepsilon_n\sqrt{\lambda_n})P^{-1}, \varepsilon_i \in \{-1, 1\}\}$$

. Deux choix de ε donneront deux racines carrées distinctes de D sauf dans le où $\lambda_1 = 0$, d'où

$$card(Rac(A)) = 2^{n-1} \text{ si } \lambda_1 = 0$$

$$card(Rac(A)) = 2^{n} \text{ si } \lambda_1 > 0$$

(d) Application : $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est le vecteur propre associé à lavvaleur propre 0

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est le vecteur propre associé à lavvaleur propre 1

$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est le vecteur propre associé à lavvaleur propre 16

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$A = Pdiag(0, 1, 16)P^{-1}$, 4 racines carrées de A

$$RacA = \{Pdiag(0, 1, 4)P^{-1}, Pdiag(0, -1, 4)P^{-1}, Pdiag(0, 1, -4)P^{-1}, Pdiag(0, -1, -4)P^{-1}\}$$

$$RacA = \{\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & \frac{-5}{3} & \frac{5}{3} \\ \frac{-5}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{5}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{-7}{3} & \frac{5}{3} & \frac{-5}{3} \\ \frac{5}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. **Cas où A est la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.**
On cherche dans ce cas à déterminer les racines carrées de la matrice nulle.
Soit $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, une racine carrée de la matrice nulle. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont R est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On note r le rang de f.

(a) $R^2 = 0 \Rightarrow fof = 0$. Donc $y \in \text{Im}f \Rightarrow \exists x \in E \,/\, y = f(x)$ d'où $f(y) = f^2(x) = 0 \Rightarrow y \in \ker f$, donc $\text{Im}f \subset \ker f$
Le théorème du rang

$$r + \dim(\ker f) = n,$$

Comme $\dim(\ker f) \geq r$ donc $r \leq \dfrac{n}{2}$

(b) i) $\sum_{i=1}^{n-r} \alpha_i e_i + \sum_{i=1}^{r} \beta_i u_i = 0$.

En composant par $f \Rightarrow f(e_i) = 0$ et $f(u_i) = e_i$, $\sum_{i=1}^{r} \beta_i f(u_i) = \sum_{i=1}^{r} \beta_i e_i = 0$, $(e_1, \cdots, e_r$ est libre $\Rightarrow \beta_i = 0\ \forall i$.

$\sum_{i=1}^{n-r} \alpha_i e_i = 0$, $(e_1, \cdots, e_{n-r})$ est libre $\Rightarrow \alpha_i = 0$

D'où B libre et $card B = dim E \Rightarrow B$ est une base.

2i)

$$M_r = \mathrm{Mat}_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) $R \in Rac(A)$ alors soit $R = 0$ soit R semblable à M_r, $R = PM_rP^{-1}, P \in GL_n(\mathbb{R})$

$$Rac(A) = \{PM_rP^{-1}/P \in GL_n(\mathbb{R}), r \in \mathbb{N}^* \cap [1, \frac{n}{2}]\} \cup \{0\}.$$

(d) Application :$n = 4$, les racines carrées de la matrice nulle sont 0 et les matrice semblables à l'une des deux matrices $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. **Cas où $A = I_n$ la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.**

(a) Soit R une racine carrée de la matrice unité I_n.
i) $R^2 = I_n \Leftrightarrow R^{-1} = R$, R est inversible.

2i) $X^2 - 1$ est un polynôme annulateur de R. R est semblable à une matrice diagonal qui ne contient que 1 où -1 sur la diagonale.

$$R \text{ est semblable à} S_q = \begin{pmatrix} -I_q & 0 \\ 0 & I_{n-q} \end{pmatrix}.$$

(b) $Rac(I_n) = \{PS_qP^{-1}/P \in Gl_n(\mathbb{R}), q \in \{0, \cdots, n\}\}$.

4. **Cas où A est une matrice symétrique réelle.**
Non, prendre par exemple $S = diag(-1, 0, 1, \cdots, n-1)$ une valeur propre négative.