



Concours Physique et Chimie
Epreuve de Physique

Date : Jeudi 03 Juin 2010

Heure : 8 H

Durée : 4 H

Nbre pages : 08

Barème : Problème I : 6 pts ; problème II : A (4 pts) ; B (2,5 pts) ; C (3,5 pts) ; D (4 pts)

L'usage d'une calculatrice non programmable est autorisé.

On veillera à une présentation claire et soignée des copies. Il convient en particulier d'indiquer avec précision les références des questions.

Un candidat peut toujours se servir d'un résultat fourni par l'énoncé pour continuer sa composition.



Problème 1

ETUDE THERMODYNAMIQUE D'UN FIL DE CAOUTCHOUC

On considère un fil de caoutchouc homogène de section Σ , de longueur L , de température T et dont l'une des extrémité est fixe et l'autre est soumise à une force de tension longitudinale d'intensité f . On note U son énergie interne et S son entropie.

L'état d'équilibre du fil est caractérisé par son énergie libre qui a pour expression :

$$F(L, T) = \frac{A}{2} T (L - L_0)^2 - C T \left(\ln \left(\frac{T}{T_0} \right) - 1 \right) - T S_0 + U_0,$$

où A , C , T_0 , L_0 , S_0 et U_0 sont des constantes positives.

Le seul travail reçu par le fil au cours d'une transformation élémentaire réversible est : $\delta W = f dL$.

I- Equation d'état

I-1- En utilisant les formes différentielles du premier et du deuxième principe, justifier l'expression de l'identité thermodynamique $dF = f dL - S dT$.

I-2-a) Déterminer l'équation d'état liant les trois variables f , L et T du fil du caoutchouc. Que représente L_0 ? Déduire l'expression de la raideur du fil et commenter.

I-2-b) Justifier que pour le diagramme de Clapeyron du fil on prend L en abscisse et f en ordonnée. Représenter l'isotherme du fil dans le diagramme de Clapeyron.

I-3- Pour interpréter l'équation d'état on adopte le modèle microscopique suivant : le fil de caoutchouc est constitué en moyenne de N maillons qui peuvent prendre, suivant la direction du fil, soit la longueur $l = a + b$ soit la longueur $l = a - b$. On admet que les maillons sont indépendants et que l'action de la force f équivaut pour chacun d'eux à une énergie potentielle $\varepsilon_p = - f l$ de sorte que les nombres N_+ et N_- des maillons possédant respectivement les

longueurs $a + b$ et $a - b$ sont de la forme : $N_+ = B e^{f(a+b)/k_B T}$; $N_- = B e^{f(a-b)/k_B T}$, avec B une constante, k_B constante de Boltzmann et T la température du fil.

I-3-a) Comment appelle-t-on ce type de loi ? Citer une situation analogue en statique des fluides.

I-3-b) Exprimer N_+ et N_- en fonction de N , f , a , b , k_B et T .

I-3-c) Montrer que la longueur L du fil s'écrit : $L = N a + N b \frac{e^{fb/k_B T} - e^{-fb/k_B T}}{e^{fb/k_B T} + e^{-fb/k_B T}}$.

I-3-d) Vérifier la validité du modèle microscopique du fil, dans la limite $fb \ll k_B T$, en identifiant les constantes A et L_0 .

II- Entropie et énergie interne

II-1- A partir de l'identité thermodynamique dF déterminer l'entropie $S(L, T)$ du fil.

II-2- Montrer que l'entropie du fil diminue quand on l'allonge à température constante. Proposer une interprétation microscopique.

II-3- Déterminer l'énergie interne $U(L, T)$ du fil en caoutchouc. Commenter le résultat.

III- Coefficients calorimétrique et thermoélastique

Au cours d'une transformation élémentaire réversible la chaleur reçue par le fil s'écrit : $\delta Q = C_L dT + \mu dL = C_f dT + \lambda df$, où C_L , μ , C_f et λ sont les coefficients calorimétriques.

III-1- Montrer que $\lambda = \frac{\mu}{\left(\frac{\partial f}{\partial L}\right)_T}$ et que $C_f - C_L = -\mu \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)_L}{\left(\frac{\partial f}{\partial L}\right)_T}$.

III-2- Déterminer les expressions de C_L et μ en fonction des dérivées partielles de l'entropie S .

En déduire que : $C_L = -T \left(\frac{\partial^2 F}{\partial T^2}\right)_L$ et $\mu = -T \frac{\partial^2 F}{\partial L \partial T}$.

III-3- Déterminer les expressions de C_L et μ pour le fil de caoutchouc.

III-4- Calculer C_L pour l'unité de masse. On donne, à la température T_0 , la masse volumique du caoutchouc $\rho = 0,9 \text{ g cm}^{-3}$; $L_0 = 30 \text{ cm}$; $\Sigma = 7 \text{ cm}^2$ et $C = 397 \text{ J K}^{-1}$.

III-5- A partir de l'équation d'état, obtenue à la question **I-2-a)**, déterminer l'expression du coefficient de dilatation linéique à tension constante du fil de caoutchouc défini par :

$\alpha = \frac{1}{L} \left(\frac{\partial L}{\partial T}\right)_f$. Commenter son signe.

ETUDE D'UN FILTRE INTERFERENTIEL

On s'intéresse dans ce problème à l'étude d'un modèle de filtre interférentiel et à la mesure de sa bande passante.

L'espace est rapporté à un repère $R(O, x, y, z)$ de base orthonormée directe $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$.

Dans tout le problème, le souligné est utilisé pour dénoter les grandeurs complexes où $i^2 = -1$.

On donne : $\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{G} = \overrightarrow{\text{grad}} \text{div} \vec{G} - \Delta \vec{G}$.

Dans ce problème la partie D est indépendante.

A- Propagation dans un milieu diélectrique linéaire homogène isotrope et transparent

A-1- Rappeler les équations de Maxwell dans le vide en présence de charges de densité $\rho(M, t)$ et de courants de vecteur densité $\vec{j}(M, t)$. Le vide est caractérisé par sa permittivité ϵ_0 et sa perméabilité μ_0 . On notera c la célérité de la lumière dans le vide.

A-2- Soit un milieu diélectrique de propriété magnétique négligeable. En présence d'un champ électromagnétique ce milieu se polarise. Cette polarisation se manifeste par l'apparition d'une charge volumique de polarisation et d'un courant volumique de polarisation tel que :

$$\rho(M, t) = \rho_l(M, t) - \text{div} \vec{P}(M, t) \text{ et } \vec{j}(M, t) = \vec{j}_l(M, t) + \frac{\partial \vec{P}(M, t)}{\partial t},$$

où $\vec{P}(M, t)$ est le vecteur polarisation, $\rho_l(M, t)$ la densité volumique des charges libres et $\vec{j}_l(M, t)$ le vecteur densité volumique des courants libres.

A-2-a) Définir le vecteur $\vec{P}(M, t)$? Donner son unité.

A-2-b) Réécrire les équations de Maxwell en fonction de $\vec{P}(M, t)$, $\rho_l(M, t)$, $\vec{j}_l(M, t)$, ϵ_0 et μ_0 .

A-3- Le milieu diélectrique considéré est supposé électriquement neutre et tel que $\vec{j}_l(M, t) = \vec{0}$. En déduire les équations de Maxwell vérifiées par $\vec{E}(M, t)$ et $\vec{B}(M, t)$.

A-4- Le milieu diélectrique est linéaire homogène et isotrope, caractérisé par sa permittivité diélectrique relative complexe $\epsilon_r(\omega)$.

A-4-a) Donner la relation liant $\vec{P}(M, t)$ et $\vec{E}(M, t)$.

A-4-b) En déduire l'équation de propagations vérifiée par le champ complexe $\vec{E}(M, t)$.

A-5-a) Le champ électrique se propageant dans ce milieu, dans le sens des x croissants, s'écrit sous la forme $\vec{E} = E_0 e^{i(\omega t - \underline{k}x)} \vec{u}_y$, avec E_0 une constante. Etablir la relation de dispersion dans ce milieu.

A-5-b) Rappeler la définition de l'indice complexe \underline{n} du milieu. En déduire l'expression de \underline{k} . Quelle propriété du milieu se manifeste lorsque la partie imaginaire $\text{Im}(\underline{k}) \neq 0$? Que représente

$\delta = \frac{1}{|\text{Im}(\underline{k})|}$? Le milieu est-il dispersif ? Justifier la réponse.

A-6- Le milieu diélectrique précédent est un milieu transparent pour les ondes électromagnétiques de pulsation ω appartenant au domaine du visible.

A-6-a) Montrer que le vecteur d'onde dans ce milieu s'écrit : $\vec{k} = n_0 \frac{\omega}{c} \vec{u}_x$, où n_0 est l'indice de réfraction du milieu.

A-6-b) Déterminer l'expression du champ magnétique dans ce milieu. Donner les caractéristiques de cette onde.

A-6-c) Montrer que la norme de la valeur moyenne du vecteur de Poynting s'écrit :

$$\left\| \langle \vec{\Pi} \rangle \right\| = n_0 \frac{\epsilon_0 c}{2} E_0^2 .$$

B- Coefficients de réflexion et de transmission

On considère deux milieux diélectriques (1) et (2) linéaires, homogènes, isotropes et transparents, d'indices de réfraction respectifs n_1 et n_2 , séparés par le dioptré plan (yOz). Le milieu (1) est situé du coté des x négatifs, dans lequel se propage, en incidence normale, dans le sens des x croissants une onde électromagnétique (\vec{E}_i, \vec{B}_i) plane, progressive, monochromatique de pulsation ω , d'amplitude E_{0i} et polarisé rectilignement selon \vec{u}_y .

On admet qu'au niveau de la surface de séparation d'équation $x=0$, cette onde donne naissance à une onde réfléchie (\vec{E}_r, \vec{B}_r) dans le milieu (1) d'amplitude complexe \underline{E}_{0r} et une onde transmise (\vec{E}_t, \vec{B}_t) dans le milieu (2) d'amplitude complexe \underline{E}_{0t} . Ces deux ondes sont planes, progressives, de même pulsation et de même polarisation que l'onde incidente,

B-1- Expliquer brièvement pourquoi les ondes réfléchie et transmise ont la même pulsation que l'onde incidente.

B-2- Donner les expressions des vecteurs d'ondes \vec{k}_i , \vec{k}_r et \vec{k}_t associées respectivement aux ondes incidente, réfléchie et transmise.

B-3- On admet l'absence de charges et de courants sur la surface de séparation d'équation $x = 0$.

B-3-a) Rappeler la relation de passage vérifiée par le champ électrique. En déduire la relation entre E_{0i} , \underline{E}_{0r} et \underline{E}_{0t} .

B-3-b) Rappeler la relation de passage vérifiée par le champ magnétique. En déduire la relation entre E_{0i} , \underline{E}_{0r} , \underline{E}_{0t} , n_1 et n_2 .

B-4-a) En déduire les coefficients de réflexion $r_{1 \rightarrow 2}$ et de transmission $t_{1 \rightarrow 2}$ en amplitude du champ électrique.

B-4-b) On définit les coefficients de réflexion et de transmission en puissance à la surface de

séparation par $R = \frac{\left\| \langle \vec{\Pi}_r(x=0,t) \rangle \right\|}{\left\| \langle \vec{\Pi}_i(x=0,t) \rangle \right\|}$ et $T = \frac{\left\| \langle \vec{\Pi}_t(x=0,t) \rangle \right\|}{\left\| \langle \vec{\Pi}_i(x=0,t) \rangle \right\|}$ avec $\vec{\Pi}_i$, $\vec{\Pi}_r$ et $\vec{\Pi}_t$ sont respectivement

les vecteurs de Poynting des ondes incidente, réfléchie et transmise. Exprimer ces coefficients en fonction de n_1 et n_2 . Quelle relation lie R et T ? Expliquer.

C- Filtre interférentiel

L'onde électromagnétique qui se propage dans le milieu diélectrique linéaire homogène isotrope et transparent est une onde lumineuse. Cette onde est caractérisée par une grandeur scalaire $\underline{s}(M,t)$ appelée vibration lumineuse correspondant au champ électrique $\underline{\vec{E}}(M,t)$. Cette vibration émise par une source S ponctuelle, monochromatique, de pulsation ω et de longueur d'onde λ s'écrit : $\underline{s}(M,t) = a e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{SM})}$, où a est l'amplitude de la vibration supposée constante.

Le filtre interférentiel (F) est une lame mince de verre à faces parallèles d'épaisseur e et d'indice $n = 1,5$, placée dans l'air d'indice $n_0 = 1$. On suppose que n_0 et n ne dépendent pas de la longueur

d'onde. Pour un rayon lumineux, de longueur d'onde λ , arrivant sous l'incidence i , cette lame donne par transmission une infinité de rayons émergents (on ne s'intéressera pas aux rayons émergents de la lame par réflexion) (voir figure 1).

Pour diminuer les pertes dans le filtre on augmente le pouvoir réflecteur de la lame de verre en déposant sur chacune de ces faces une mince couche semi-réfléchissante non absorbante d'un diélectrique. On notera les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude du champ électrique par : $r = r_{\text{verre traité} \rightarrow \text{air}}$, $t_1 = t_{\text{air} \rightarrow \text{verre traité}}$ et $t_2 = t_{\text{verre traité} \rightarrow \text{air}}$, et on notera R le coefficient de réflexion en puissance de la surface air/verre traité.

C-1- Soient a_0 l'amplitude de l'onde incidente et $a_1, a_2, \dots, a_N, \dots$ les amplitudes respectives du 1^{er}, 2^{ème}, ..., N^{ième}, ... rayons transmis. Déterminer les rapports $\frac{a_1}{a_0}$ et $\frac{a_2}{a_0}$, puis déduire le rapport

$\frac{a_N}{a_0}$ en fonction de r_2 , t_1 , t_2 et $(N - 1)$.

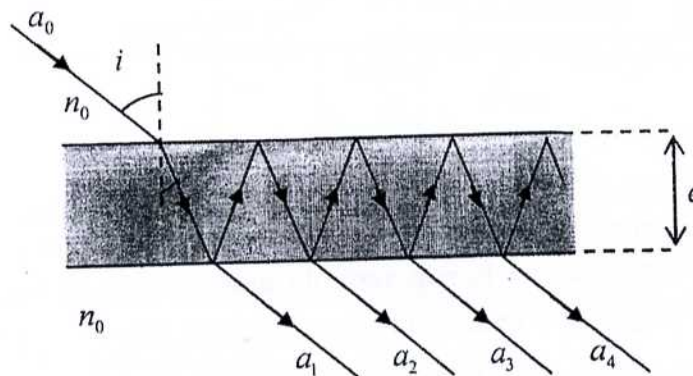


figure 1

C-2- Montrer que le déphasage φ entre deux ondes transmises successives est $\varphi = \frac{4 \pi n e}{\lambda} \cos i'$

avec i' l'angle de réfraction.

C-3- Montrer que la vibration lumineuse associée au N^{ième} rayon transmis, au point M situé à l'infini s'écrit : $\underline{s}_N(M, t) = \underline{s}_1(M, t) R^{N-1} e^{-i(N-1)\varphi}$.

C-4- L'intensité lumineuse associée à l'onde totale transmise par le filtre est de la forme :

$$I(M) = \frac{I_0}{1 + \frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}.$$

C-4-a) Quelle doit être la valeur du coefficient R pour que le contraste défini par : $\gamma = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max}}$

soit égal à 0,95 ? I_{\max} et I_{\min} désignent les intensités transmises respectivement maximale et minimale.

C-4-b) On définit la largeur angulaire à mi-hauteur $\Delta\varphi$ par l'intervalle à l'intérieur duquel l'intensité transmise $I(M)$ est supérieure ou égale à la moitié de sa valeur maximale (voir figure 2). Sachant que $\Delta\varphi$ est faible, déterminer son expression. En déduire que le pouvoir de résolution

du filtre s'écrit : $\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{\pi\sqrt{R}}{1-R} p$, où p est un entier.

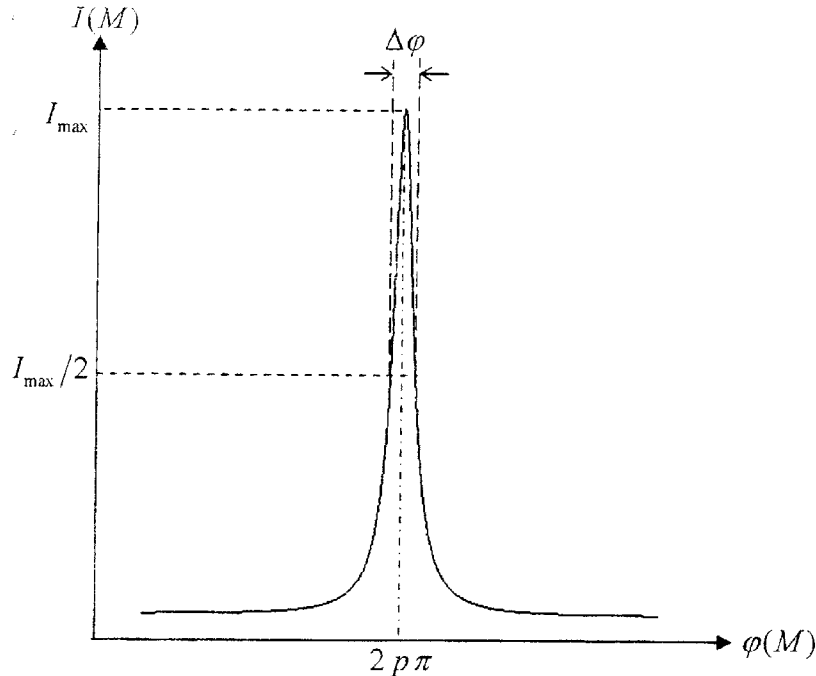


figure 2

C-5- Le filtre (F) est éclairé en incidence normale par un faisceau parallèle de lumière blanche. L'épaisseur e est choisie de sorte que le filtre (F) transmet un maximum d'intensité pour la longueur d'onde $\lambda_0 = 546 \text{ nm}$ correspondante à la raie verte du mercure et qu'il atténue tout le reste du spectre du visible dont les longueurs d'ondes sont comprises entre 400 nm et 800 nm .

C-5-a) Montrer que les valeurs possibles de l'épaisseur e de la lame de verre sont : $e = p \frac{\lambda_0}{2n}$, avec

$p \in \mathbb{N}^*$. Quelles valeurs de l'épaisseur e doit-on choisir afin qu'il n'y ait qu'une bande passante autour de λ_0 dans le visible.

C-5-b) Quelle est l'influence de l'épaisseur e sur les performances du filtre ?

C-5-c) Déterminer la bande passante $\Delta\lambda$ du filtre (F) pour $e = 0,36 \text{ }\mu\text{m}$. On prendra $R = 0,9$.

D- Mesure de la bande passante d'un filtre interférentiel

I- Etude de l'interféromètre de Michelson réglé en lame d'air

Un interféromètre de Michelson est plongé dans l'air d'indice égal à 1. Il est constitué de deux miroirs plans M_1 et M_2 perpendiculaires l'un à l'autre et par une lame semi réfléchissante, non absorbante, appelé séparatrice S_p dont les facteurs de transmission et de réflexion valent $1/2$, incliné de 45° par rapport à M_1 et M_2 (voir figure 3). On ne tiendra compte, ni des inconvénients liés à l'épaisseur non négligeable de la séparatrice qui sont corrigés grâce à une lame compensatrice, ni des changements de phase par réflexion.

Le miroir M_1 est fixe et on repère la position du miroir mobile M_2 par l'abscisse x du point A_2 . L'origine $x = 0$ correspond au cas où $JA_1 = JA_2$.

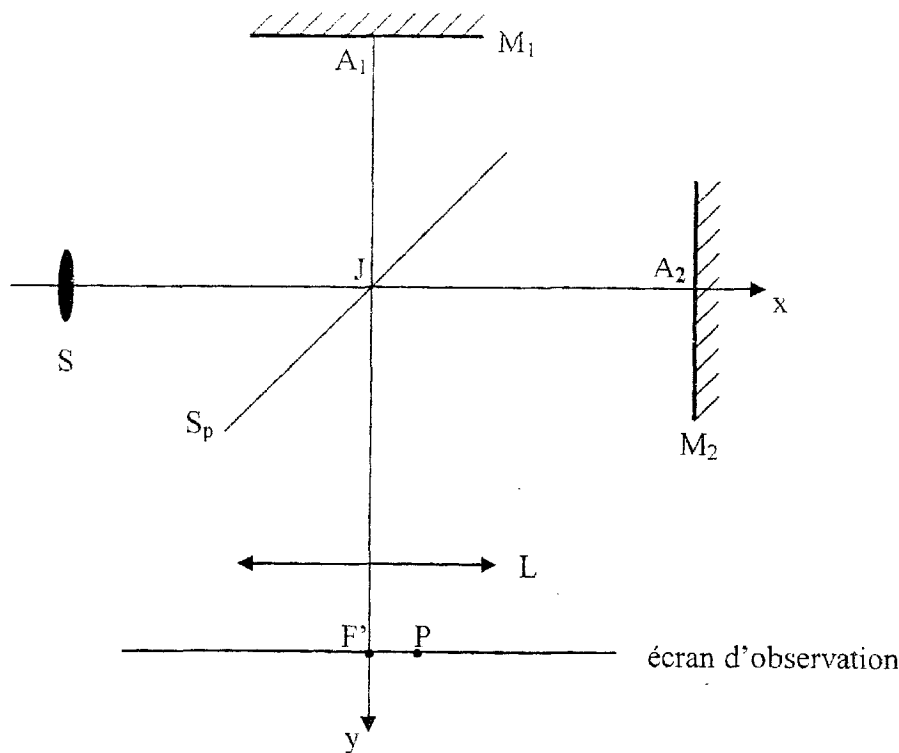


figure 3

On éclaire le dispositif par une source étendue S monochromatique, de nombre d'onde $\sigma_0 = \frac{1}{\lambda_0}$.

On note I_0 l'intensité du rayon lumineux incident issu de la source S.

On place à la sortie du Michelson une lentille mince convergente L d'axe optique (Jy) et de distance focale f' .

D-I-1- Soit un rayon lumineux incident issu de la source S et faisant un angle θ avec l'axe (Jx). Donner l'expression de la différence de marche δ entre les deux ondes qui interfèrent au point P en fonction de x et de θ .

D-I-2- En se plaçant dans l'approximation de Gauss, exprimer l'intensité lumineuse $I(r)$ au point P en fonction de $r = F'P$, f' , σ_0 , x et de I_0 .

D-I-3- Grace à un moteur électrique, on translate à vitesse uniforme le miroir M_2 . On place au foyer F' de la lentille L un détecteur qui délivre un signal $S_0(x)$ proportionnel à $I(r = 0)$. Montrer que $S_0(x) = S_{0m} [1 + \cos(4\pi\sigma_0 x)]$. Quelle est la période T_0 de l'interférogramme $S_0(x)$.

II- Bande passante du filtre (F)

On considère, dans cette partie, que S est une source de lumière blanche devant laquelle on place le filtre (F) de bande passante $\Delta\sigma$ centrée autour de σ_0 .

Dans l'intervalle $[\sigma, \sigma + d\sigma]$ l'intensité émise par le filtre est $dI_0 = I_\sigma d\sigma$, où I_σ est l'intensité spectrale du filtre. On admettra que les rayonnements correspondants à chaque intervalle de largeur $d\sigma$ sont incohérents.

L'intensité spectrale I_σ du filtre utilisé peut être modélisée par une raie à profil rectangulaire :

$$I_\sigma = \frac{I_0}{\Delta\sigma} \quad \text{si} \quad -\frac{\Delta\sigma}{2} \leq \sigma - \sigma_0 \leq \frac{\Delta\sigma}{2}$$

$$I_\sigma = 0 \quad \text{ailleurs}$$

D-II-1- Montrer que le signal délivré par le détecteur est de la forme :

$S(x) = S_m [I + V(x) \cos(4\pi\sigma_0 x)]$ et exprimer le facteur de visibilité $V(x)$ de l'interférogramme.

On donne : $\int_{u_0-a}^{u_0+a} \cos(\alpha u) du = \frac{2 \cos(\alpha u_0) \sin(\alpha a)}{\alpha}$.

D-II-2-a) Montrer que les positions x_q du miroir M_2 , pour les quelles les interférences sont brouillées, sont données par : $x_q = \frac{q}{2 \Delta\sigma}$ avec $q \in \mathbb{Z}^*$.

D-II-2-b) Représenter l'allure du facteur de visibilité $V(x)$, ainsi que celle de l'interférogramme $S(x)$.

D-II-3- Le miroir M_2 peut se translater dans l'intervalle $x \in \left[-\frac{L}{2}, +\frac{L}{2}\right]$ avec $L = 5 \text{ mm}$. Exprimer en fonction de L la plus petite largeur en nombre d'onde $\Delta\sigma_m$ que le dispositif peut discerner. Calculer $\Delta\sigma_m$ en cm^{-1} .

D-II-4- On compte un nombre de franges brillantes $N = 100$ entre le brouillage x_{-1} et x_{+1} . En déduire la largeur en nombre d'onde $\Delta\sigma$ de la bande passante du filtre (F) ensuite en longueur d'onde $\Delta\lambda$. On rappelle que $\lambda_0 = 546 \text{ nm}$.

D-II-5- L'erreur théorique du décompte des franges est de deux franges. En déduire l'incertitude absolue $\delta(\Delta\lambda)$ sur la mesure expérimentale de la largeur de la bande passante du filtre (F).