REPUBLIQUE TUNISIENNE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Concours Nationaux d'Entrée aux Cycles de Formation d'Ingénieurs
Session 2010

الجمهورية التونسية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
المناظرات الوطنية للدخول إلى مراحل تكوين المهندسين
دورة 2010

Concours Physique et Chimie
Epreuve de Mathématiques

Date: Lundi 31 Mai 2010	**Heure: 8 H**	**Durée: 4 H**	**Nbre pages: 5**
Barème : Exercice: 4 pts,	**Problème: Partie I:** 9 pts,	**Partie II:** 7 pts.	

Une grande importance sera attachée à la rigueur du raisonnement, à la clarté et au soin de la présentation. L'usage des calculatrices n'est pas autorisé. Il est rappelé que tout résultat énoncé dans le texte peut être utilisé pour traiter la suite, même s'il n'a pu être démontré.

On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels non nuls, $\mathbb{R}$ le corps des nombres réels, $\mathbb{R}_+$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ formé des nombres réels positifs, $\mathbb{R}^*$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ formé des nombres réels différents de 0 et $\mathbb{R}_+^*$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ formé des nombres réels strictement positifs.

Exercice

Soit φ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$. On définit la fonction g par

$$g:\ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R}, \\ (x,y) & \mapsto & g(x,y) = \varphi(x^2+y^2). \end{array}$$

1. (a) Justifier que g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$.

   (b) Calculer les dérivées partielles premières $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial g}{\partial y}$ en fonction de φ'.

   (c) Calculer les dérivées partielles secondes $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}$ et $\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}$ en fonction de φ' et φ''.

2. Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle

$$tz''(t) + z'(t) = 2t. \tag{1}$$

3. On veut déterminer les fonctions φ pour lesquelles la fonction g vérifie l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) = 8(x^2+y^2), \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*. \tag{2}$$

   (a) Montrer que si la fonction g vérifie (2) alors la fonction φ vérifie l'équation différentielle (1), et donner l'expression de φ.

   (b) En déduire l'expression de g.

   (c) Déterminer la fonction g solution (2) et vérifiant $g(1,0) = 0$ et $\dfrac{\partial g}{\partial x}(1,0) + \dfrac{\partial g}{\partial y}(1,0) = 0$.

Problème

Partie I

Notations

- $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ désigne un réel strictement positif.
- ω_α désigne la fonction définie par $\omega_\alpha(t) = t^{\alpha-1}e^{-t}$, pour tout $t \in]0, +\infty[$.
- E est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions polynomiales réelles définies sur $[0, +\infty[$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$, E_n est le sous-espace de E formé par les fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à n.
- On désigne par $\mathcal{B} = (1, x, x^2, \dots, x^n)$ la base canonique de E_n.

1. Montrer que, pour tout $(P, Q) \in E^2$, la fonction $PQ\omega_\alpha$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

2. On définit Φ_α par:
$$\Phi_\alpha(P, Q) = \int_0^\infty P(x)Q(x)\omega_\alpha(x)dx.$$
Montrer que Φ_α définit un produit scalaire sur E.
On notera par $||P||^2 = \Phi_\alpha(P, P)$, où $||P||$ désigne la norme de P pour le produit scalaire Φ_α.

3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On définit l'équation différentielle suivante:
$$(\mathcal{L}_\lambda) : \qquad xy''(x) + (\alpha - x)y' + \lambda y = 0.$$
On va chercher les solutions y_λ développables en séries entières non nulles.
   (a) Montrer que les coefficients de la série entière solution de $(\mathcal{L}_\lambda)$ vérifient la relation:
$$a_{k+1} = -\frac{\lambda - k}{(k+1)(\alpha + k)}a_k, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$
   (b) Expliciter les solutions y_λ de $(\mathcal{L}_\lambda)$.
   (c) Pour $\lambda = n \in \mathbb{N}$, montrer que les solutions sont des fonctions polynômiales de degré n. On note L_n les solutions dont le coefficient dominant a_n est égal à 1.
   (d) Calculer L_0, L_1 et L_2.
   (e) Expliciter, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, la fonction polynômiale L_n.

4. Soit $f(x) = x\omega_\alpha(x)y'(x)$ où y est une fonction de classe C^2 définie sur $\mathbb{R}_+$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
   (a) Montrer que y est solution de $(\mathcal{L}_n)$ si et seulement si f vérifie l'équation différentielle suivante:
$$F_n : \quad f'(x) + n\omega_\alpha(x)y(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(b) Montrer que, pour tout $(P, Q) \in E^2$, on a:

$$\Phi_{\alpha+1}(P,Q) = \Phi_\alpha(xP,Q) = \Phi_\alpha(P,xQ).$$

avec xP (respectivement xQ) désigne la fonction polynômiale associée au polynôme $(XP)(X) = XP(X)$ (respectivement $(XQ)(X) = XQ(X)$) .

(c) En utilisant la question 4.(a), montrer que:

$$n\Phi_\alpha(L_n, L_m) = \Phi_{\alpha+1}(L_m^{'}, L_n^{'}) = m\Phi_\alpha(L_n, L_m), \quad \forall (n,m) \in \mathbb{N}^2.$$

où $L^{'}$ désigne la fonction dérivée de L.

(d) Montrer que la famille $(L_k)_{k\in\{0,1,\ldots,n\}}$ est une base orthogonale de E_n.

5. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, justifier l'existence d'une unique famille de coefficients réels $(\beta_{n,k})_{0\leq k\leq n+1}$ telle que:

$$xL_n(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \beta_{n,k} L_k(x).$$

(b) Soit $n \geq 2$. justifier que, pour tout $k \leq n-2$, on a $\beta_{n,k} = 0$.

(c) En utilisant la question 3.(d), vérifier que:

$$\begin{cases} \beta_{n,n+1} = 1, \\ \beta_{n,n} = \alpha + 2n, \\ \beta_{n,n-1} = n(\alpha + n - 1). \end{cases}$$

(d) Vérifier que

$$L_{n+1}(x) = (x - \alpha - 2n)L_n(x) - n(\alpha + n - 1)L_{n-1}(x), \quad n \geq 1.$$

(e) En utilisant la question 5.(a), montrer que:

$$\beta_{n,n+1}\Phi_\alpha(L_{n+1}, L_{n+1}) = \beta_{n+1,n}\Phi_\alpha(L_n, L_n), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(f) Déduire la norme de L_n.

(g) On considére l'endomorphisme φ de E_n défini par

$$\varphi(P)(x) = \frac{x}{n}P^{''}(x) + \frac{\alpha - x}{n}P^{'}(x).$$

Montrer que φ est bien défini et donner sa matrice dans la base canonique de E_n.

(h) L'endomorphisme φ est-il diagonalisable.

(i) Calculer $\varphi(L_k)$, expliciter une base de vecteurs propres pour φ.

Partie II

1. Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, on considère la fonction g définie par

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}, \\ t & \longmapsto & \cos(xt), \end{array}$$

2π périodique et paire.

   (a) Calculer les coefficients de Fourier trigonométrique de g.

   (b) Établir que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, on a

$$\frac{\pi}{\sin(\pi x)} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2x}{x^2 - n^2}.$$

2. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels. On admet le résultat suivant:

La suite$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si et seulement si la série $\sum_{n\geq 0}(x_{n+1} - x_n)$ est convergente.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, $n \in \mathbb{N}^*$. On pose

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k^x} \quad \text{et} \quad H_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^x}.$$

   (a) Soit u_n la suite de fonctions définie par

$$u_n(x) = \frac{1}{n^x} - \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x}.$$

   Montrer que

$$0 \leq u_n(x) \leq \frac{x}{n^{x+1}}.$$

   (Indication: Utiliser le théorème des accroissement fini pour la fonction $\frac{1}{t^x}$).

   (b) Montrer que la série des fonctions de terme général u_n converge simplement sur $]0, +\infty[$ vers une fonction continue qui sera notée U.

   (c) Montrer que la suite des fonctions $v_n(x) = H_n(x) - \frac{n^{1-x}}{1-x}$ converge simplement sur $]1, +\infty[$ vers une fonction qui sera notée ζ.

   (d) Montrer que

$$U(x) = \zeta(x) + \frac{1}{1-x}, \quad \forall x \in]1, +\infty[.$$

   (e) Montrer que la suite numérique $H_n(1) - \ln(n)$ est convergente. On note γ sa limite.

   (f) Prouver que la série de fonctions $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ définit une fonction de classe C^1 sur $]0, +\infty[$. On note f cette fonction.

   (g) Montrer que, pour tout $x > 1$, on a

$$S_{2n}(x) = H_{2n}(x) - 2^{1-x} H_n(x).$$

(h) En déduire que

$$f(x) = (1 - 2^{1-x})\zeta(x), \quad \forall x \in]1, \infty[.$$

(i) Montrer que la fonction ζ admet au voisinage de 1 le développement suivant:

$$\zeta(x) = \frac{1}{x-1} + \gamma + o(1).$$

(Indication: Utiliser la question 2.(c) et 2.(d)).

(j) Soit $x > 0$ et $a > -1$. Etudier l'intégrabilité de la fonction $t \to \varphi_a(t) = \dfrac{t^{x-1}}{a + e^t}$ sur $]0, +\infty[$. On désignera par la suite

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} \varphi_0(t) dt.$$

(k) Prouver que, pour $|a| < 1$ et $x > 0$, on a:

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{a + e^t} = \Gamma(x) \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{a^n}{(n+1)^x}.$$

(l) Déduire la relation:

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1 + e^t} = \Gamma(x) f(x).$$

(m) Soit $x \in]0, 1[$, $t \in \mathbb{R}_+^*$. On définit une suite de fonctions par:

$$\begin{cases} w_0(t) = t^{x-1} \\ w_n(t) = (-1)^n t^n (t^x - t^{-x}) & \text{si } n \geq 1. \end{cases}$$

i. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 w_n(t) dt$.

ii. Prouver que l'on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1 + t} dt = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}.$$

Fin de l'épreuve