Concours Physique et Chimie
Correction de l'epreuve de Mathématiques

Exercice

1. (a) Comme g est la composé de deux fonctions qui sont est de classe $\mathcal{C}^2$ donc elle est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$.

   (b) $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 2x\varphi'(x^2+y^2)$ et $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 2y\varphi'(x^2+y^2)$.

   (c) $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) = 2\varphi'(x^2+y^2)+4x^2\varphi''(x^2+y^2)$ et $\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) = 2\varphi'(x^2+y^2)+4y^2\varphi''(x^2+y^2)$.

2. les solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ sont $z(t) = \dfrac{1}{2}t^2 + c_1\ln(t) + c_2$

3. (a) $\varphi(t) = \dfrac{1}{2}t^2 + c_1\ln(t) + c_2$.

   (b) $g(x,y) = \dfrac{1}{2}(x^2+y^2)^2 + c_1\ln(x^2+y^2) + c_2$.

   (c) $g(x,y) = \dfrac{1}{2}(x^2+y^2)^2 - \dfrac{1}{4}\ln(x^2+y^2) - \dfrac{1}{2}$.

Problème

Partie I

1. $PQ\omega_\alpha = O(\dfrac{1}{t^2})$ au voisinage de l'infini et $PQ\omega_\alpha = O(\dfrac{1}{t^{1-\alpha}})$ au voisinage de zéro d'où l'intégrabilité sur $]0,+\infty[$.

2. Φ_α définit bien un produit scalaire sur E.

3. (a) Les coefficients de la solution développable en série entière $(\mathcal{L}_\lambda)$ vérifient la relation:

$$a_{k+1} = -\frac{\lambda - k}{(k+1)(\alpha+k)}a_k, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

(b) D'après la question précédente on a $a_p = a_0 \dfrac{\prod_{k=0}^{p-1}(k-\lambda)}{p!\prod_{k=0}^{p-1}(k+\alpha)}$ pour tout $p \geq 1$ et donc

$y_\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

(c) Pour $\lambda = n \in \mathbb{N}$, on remarque de l'expression de a_p que $a_p = 0$, pour tout $p \geq n+1$, et par suite y_λ est un polynôme de degré n.

(d) $L_0 = 1$, $L_1 = x + \alpha$ et $L_2 = x^2 - 2(1+\alpha)x + \alpha(1+\alpha)$.

(e) Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, la fonction polynômiale $L_n(x) = \sum_{p=0}^{n} \dfrac{n!(\alpha)_n(-n)_p}{p!(\alpha)_p(-n)_n} x^p$ où $(\rho)_k = \rho(\rho+1)\ldots(\rho+k-1)$ avec la convention $(\rho)_0 = 1$.

4. (a) Soit y la solution de $(\mathcal{L}_n)$. Comme $e^x f(x) = x^\alpha y'(x)$ donc par dérivation on obtient $f'(x) + n\omega_\alpha(x)y(x) = 0$.

(b) L'égalité $\Phi_{\alpha+1}(P,Q) = \Phi_\alpha(xP,Q) = \Phi_\alpha(P,xQ)$. est évidente.

(c) Par intégration par partie et en exploitant la relation établit en (4.a) on obtient l'égalité à droite. Par inversion des rôles de m et n on aura l'autre égalité.

(d) D'après la relation $n\Phi_\alpha(L_n, L_m) = m\Phi_\alpha(L_n, L_m)$, On déduit que la famille $(L_k)_{k\in\{0,1,\ldots,n\}}$ est une base orthogonale de E_n.

5. (a) Comme $xL_n(x) \in E_{n+1}$ et la famile $(L_k)_{k\in\{0,1,\ldots,n+1\}}$ est une base de E_{n+1} donc il existe une unique famille de coefficients réels $(\beta_{n,k})_{0\leq k\leq n+1}$ telle que:

$$xL_n(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \beta_{n,k} L_k(x).$$

(b) Pour $n \geq 2$, en remarquant que $\Phi_\alpha(xL_n, L_p) = \Phi_\alpha(L_n, xL_p) = 0$, pour $p+1 \leq n-1$, c.a.d $p \leq n-2$ on a $\beta_{n,k} = 0$ pour tout $k \leq n-2$.

(c) Comme $xL_n(x) = \sum_{p=0}^{n} \dfrac{n!(\alpha)_n(-n)_p}{p!(\alpha)_p(-n)_n} x^{p+1}$ d'après la question (3.e) et par identification de la relation (5.a) on obtient

$$\begin{cases} \beta_{n,n+1} = 1, \\ \beta_{n,n} = \alpha + 2n, \\ \beta_{n,n-1} = n(\alpha + n - 1). \end{cases}$$

(d) D'après (5.a) et (5.c) on a $xL_{n+1} = L_{n+1} + (\alpha+2n)L_n + n(\alpha+n-1)L_{n-1}$ d'où $L_{n+1}(x) = (x - \alpha - 2n)L_n(x) - n(\alpha+n-1)L_{n-1}(x), \quad n \geq 1$. Pour tout $n \geq 1$

(e) On a d'une part $\Phi_\alpha(xL_n, L_{n+1}) = \beta_{n,n+1}\Phi_\alpha(L_{n+1}, L_{n+1})$, d'autre part $xL_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+2} \beta_{n,k} L_k(x)$. Alors $\Phi_\alpha(xL_n, L_{n+1}) = \Phi_\alpha(L_n, xL_{n+1}) = \beta_{n+1,n}\Phi_\alpha(L_n, L_n)$ finalement $\beta_{n,n+1}\Phi_\alpha(L_{n+1}, L_{n+1}) = \beta_{n+1,n}\Phi_\alpha(L_n, L_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(f) D'après la question précédente on a $\Phi_\alpha(L_n, L_n) = n!(\alpha)_n\Gamma(\alpha)$. Soit $||L_n|| = \sqrt{n!(\alpha)_n\Gamma(\alpha)}$.

(g) L'endomorphisme φ est bien définie car $deg(\varphi(P)) \leq deg(P)$. Sa matrice dans la base canonique est:

$$\mathcal{M}(\varphi, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\alpha}{n} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{-1}{n} & \frac{2(\alpha+1)}{n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & \frac{-k}{n} & \frac{(k+1)(k+\alpha)}{n} & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & n+\alpha-1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(h) On remarque que l'endomorphisme φ admet $n+1$ valeurs propre distinctes donc elle est diagonalisable.

(i) Puisque $\varphi(L_k) = -\frac{k}{n} L_k$, L_k est un vecteur propre associé à la valeur propre $-\frac{k}{n}$ d'où la famille $(L_k)_{k\in\{0,1,\dots,n\}}$ est une base des vecteurs propres.

Partie II

1. (a) Les coefficients de Fourier trigonométrique de g sont donnés par

$$a_n(g) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(xt)\cos(nt)dt = (-1)^n \frac{2x\sin(x\pi)}{\pi(x^2-n^2)}.$$

les $b_n(g) = 0$ car g est paire.

(b) Comme g est continue et $\mathcal{C}^1$ par morçeau d'après Drichlet $g(0) = 1 = \frac{\sin(x\pi)}{x\pi} + \frac{\sin(x\pi)}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2x}{x^2-n^2}$ d'où, pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, on a

$$\frac{\pi}{\sin(\pi x)} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{2x}{x^2-n^2}.$$

2. (a) Comme la fonction $\frac{1}{t^x}$ est décroissante sur $]0,+\infty[$ alors on a $u_n(x) \geq 0$ on a $\frac{1}{(n+1)^x} - \frac{1}{n^x} = \int_n^{n+1} \frac{dt}{(t^x)'} = -x\int_n^{n+1}\frac{dt}{t^{x+1}}$ d'où,
$u_n(x) = \frac{1}{(n+1)^x} - \int_n^{n+1}\frac{dt}{t^x} + x\int_n^{n+1}\frac{dt}{t^{x+1}}$ or $\frac{1}{(n+1)^x} - \int_n^{n+1}\frac{dt}{t^x} \leq 0$
car la fonction $\frac{1}{t^x}$ est décroissante alors on a $u_n(x) \leq \frac{x}{n^{x+1}}$ d'où $0 \leq u_n(x) \leq \frac{x}{n^{x+1}}$.

(b) Comme $0 \leq u_n(x) \leq \frac{x}{n^{x+1}}$ et la série de terme général $\frac{x}{n^{x+1}}$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ donc la série des fonctions de terme général u_n converge simplement sur $]0,+\infty[$ de plus les fonctions u_n sont continues sur $]0,+\infty[$ et il y a convergence uniforme et même normale sur $[a,+\infty[$ car $0 \leq \sup_{x\geq a} u_n(x) \leq \frac{a}{n^{a+1}}$ donc la série de fonctions u_n converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers une fonction continue qui sera notée U.

(c) $v_{n+1}(x) - v_n(x) = u_n(x) + \frac{1}{(n+1)^x} - \frac{1}{n^x}$. Comme $\sum u_n$ et $\sum \frac{1}{(n+1)^x} - \frac{1}{n^x}$ convergent simplement sur $]1, +\infty[$ alors la suite v_n converge simplement sur $]1, +\infty[$ vers une fonction qui sera notée ζ.

(d) D'après la question précédente on a, $u_n(x) = v_{n+1}(x) - v_n(x) + \frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x}$. Donc par sommation et passage à la limite, on obtient $U(x) = \zeta(x) + \frac{1}{1-x}, \quad \forall x \in]1, +\infty[$

(e) Soit $\gamma_n = H_n(1) - \ln(n)$. Comme $\gamma_{n+1} - \gamma_n \sim \frac{-1}{2n^2}$ donc la suite numérique $H_n(1) - \ln(n)$ est convergente. On note γ sa limite.

(f) La série de fonctions $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ est une série alternée verifiant le CSSA donc converge simplement sur $]0, +\infty[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ les fonctions $u_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ sont C^1. De plus la série des dérivées est une série alternées vérifiant le CSSA et donc converge uniformement sur $[a, +\infty[$ car $\sup_{x \geq a} \left| \displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k \ln(k)}{k^x} \right| \leq \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^a}$.

D'où la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ définit une fonction de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.
On note f cette fonction.

(g) Pour tout $x > 1$, on a
$$S_{2n}(x) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k^x} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{2k-1}}{(2k)^x} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{2k}}{(2k+1)^x} = H_{2n}(x) - 2^{1-x} H_n(x).$$

(h) Par passage à la limite, lorsque n tend vers l'infini, on obtient
$$f(x) = (1 - 2^{1-x})\zeta(x), \quad \forall x \in]1, \infty[.$$

(i) D'après la question (2.d) on a $U(x) = \zeta(x) - \frac{1}{x-1}$. De plus $U(x) = U(1) + o(1)$. Or $U(1) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} u_k(1) = \lim_{p \to \infty} \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{p} - \ln(p+1) = \gamma$. Donc au voisinage de 1, la fonction ζ admet le développement suivant:
$$\zeta(x) = \frac{1}{x-1} + \gamma + o(1).$$

(j) Soit $x > 0$ et $a > -1$. Comme $\varphi_a(t) \sim \frac{1}{(a+1)t^{1-x}}$ au voisinage de zéro et $\varphi_a(t) = o(\frac{1}{t^2})$ au voisinage de l'infini on a l'intégrabilité de la fonction $t \to \varphi_a(t) = \dfrac{t^{x-1}}{a + e^t}$ sur $]0, +\infty[$.

(k) Pour $|a| < 1$ et $x > 0$, on a: $\left| t^{x-1} e^{-t} \displaystyle\sum_{n=0}^{N} (-ae^{-t})^n \right| \leq 2\varphi_a(t)$. De plus la série $t^{x-1} e^{-t} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-ae^{-t})^n$ converge simplement vers $\frac{t^{x-1}}{a+e^t}$. D'après le théorème de convergence dominé, on a
$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{a + e^t} dt = \Gamma(x) \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{a^n}{(n+1)^x}.$$

(l) Considérons la série $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{a^{n-1}}{n^x}$ par rapport à la variable a et pour $x>0$ fixé. C'est une série alternée vérifiant CSSA pour $a\in[0,1[$. Puisque $\lim_{a\to 1}(-1)^n\frac{a^{n-1}}{n^x}=\frac{(-1)^n}{n^x}$ existe, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, et la série $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ converge vers f. De plus $\sup_{a\in[0,1[}\left|R_n(a)=\sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^k\frac{a^{k-1}}{k^x}\right|\leq\sup_{a\in[0,1[}\frac{a^n}{(n+1)^x}\leq\frac{1}{(n+1)^x}$ la série $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{a^{n-1}}{n^x}$ converge uniformément sur $[0,1[$. D'où d'après le théorème de la double limite on a: $\lim_{a\to 1}\Gamma(x)\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{a^{n-1}}{n^x}=\Gamma(x)f(x)=\lim_{a\to 1}\int_0^{+\infty}\varphi(t)dt=\int_0^{+\infty}\frac{t^{x-1}}{1+e^t}dt$ par suite: $\int_0^{+\infty}\frac{t^{x-1}}{1+e^t}dt=\Gamma(x)f(x)$, car $\left|\int_0^{+\infty}\varphi(t)dt-\int_0^{+\infty}\frac{t^{x-1}}{1+e^t}dt\right|\leq(1-a)\int_0^{+\infty}\frac{t^{x-1}}{1+e^t}dt$, et ce dernier tend vers zéro quand a tend vers 1.

(m) i. On a $\int_0^1 w_0(t)dt=\frac{1}{x}$ et pour $n\geq 1$ et
$\int_n^1 w_n(t)dt=(-1)^n(\frac{1}{n+x+1}-\frac{1}{n+-x+1})=\frac{(-1)^n 2x}{x^2-(n+1)^2}$

ii. On a $\int_0^{\infty}\frac{t^{x-1}}{1+t}dt=\int_0^1\frac{t^{x-1}+t^{-x}}{1+t}dt=\int_0^1(t^{x-1}+t^{-x})(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n)dt=$ $\int_0^1(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{n+x-1}+(-1)^n t^{n-x})dt=\int_0^1(t^{x-1}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n t^{n-1}(t^x-t^{-x}))dt$

Soit $K_N(t)=\sum_{n=1}^{N}(-1)^n t^{n-1}(t^x-t^{-x})$, alors $\left|K_N(t)\right|\leq 2(t^x-t^{-x})$ qui est intégrable sur $]0,1[$. D'après le théorème CD
$\int_0^{\infty}\frac{t^{x-1}}{1+t}dt=\int_0^1 w_0(t)dt-\sum_{n=1}^{\infty}\int_n^1 w_{n-1}(t)dt=\frac{1}{x}+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{2x}{x^2-n^2}=\frac{\pi}{\sin(x\pi)}$.