Concours Nationaux d'Entrée aux Cycles de Formation d'Ingénieurs
Session 2009

Concours Physique et Chimie
Correction de l'épreuve de Mathématiques

Exercice

1) a) comme $|u_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n(n^2-1)}| \leq \dfrac{1}{n(n^2-1)}$ et puisque $\dfrac{1}{n(n^2-1)} \sim \dfrac{1}{n^3}$ donc la série $\sum_{n=2}^{+\infty} \dfrac{\sin(nx)}{n(n^2-1)}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ on note $f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \dfrac{\sin(nx)}{n(n^2-1)}$ sa limite simple sur $\mathbb{R}$, les suites des fonctions u_n sont C^1 sur $\mathbb{R}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n'(x) = \dfrac{\cos(nx)}{(n^2-1)}$ et comme $|u_n'(x) = \dfrac{\cos(nx)}{(n^2-1)}| \leq \dfrac{1}{(n^2-1)}$ et $\dfrac{1}{n^2} \sim \dfrac{1}{n^2}$ donc la série $\sum u_n'$ converge normalement et par suite uniformément sur $\mathbb{R}$ donc f est une fonction C^1 sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f'(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \dfrac{\cos(nx)}{(n^2-1)}$

b) d'après la question précédedente on a $f'(0) = \sum_{n=2}^{+\infty} \dfrac{1}{(n^2-1)} = \dfrac{3}{4}$

2) a) on pose $a_n = \dfrac{n}{n^2-1}$, elle est décroissante et tend vers zéro. de plus si on pose $I = [a, a2\pi - a]$ et $\varphi_n(x) = -\sin(nx)$ on a pour tout $N \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in I$ la majoration suivante $|\sum_{k=2}^{N} \varphi_k(x)| \leq \dfrac{1}{\sin(\frac{a}{2})}$ d'o la convergence uniforme de $\sum_{n\geq 2} \dfrac{-n\sin(nx)}{(n^2-1)}$ sur $[a, 2\pi - a]$ pour tout $a \in]0, \pi[$.

b) on vient de verifier que f est C^2 sur $]0, 2\pi[$.

3) a) on a $b_n(g) = \dfrac{1}{n}$ et $a_n(g) = 0$ d'après Drichlet ona pour tout $x \in \mathbb{R}$ $\widetilde{f}(x) = \sum_{n=1} \dfrac{\sin(nx)}{n}$

b) comme g est continue en $\dfrac{\pi}{2}$ on a $g(\dfrac{\pi}{2}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{2k+1}$

d'aprèsle théorème de Parseval on $\sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$

4) a) pour tout $x \in]0, 2\pi[$ on a $f''(x) + f(x) = \sum_{n\geq 2} \dfrac{-n\sin(nx)}{(n^2-1)} + \sum_{n=2}^{+\infty} \dfrac{\sin(nx)}{n(n^2-1)} = \sin(x) - g(x) = \Phi(x)$

b) la solution de l'équation différentiel du second ordre à pour solution $y(x) = \dfrac{\pi}{2}\cos(x) + \dfrac{3}{4}\sin(x) - \dfrac{\pi - x}{2} - \dfrac{x}{2}\cos(x)$

c) vue l'unicité de solution on a $f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \dfrac{\sin(nx)}{n(n^2-1)} = \dfrac{\pi}{2}\cos(x) + \dfrac{3}{4}\sin(x) - \dfrac{\pi - x}{2} - \dfrac{x}{2}\cos(x)$

Problème

Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $F_n(x) = (x^2-1)^n$ et on définit la suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à coefficients réels par :

$$\begin{cases} P_0(x) = 1 \\ P_n(x) = \dfrac{1}{2^n n!} F_n^{(n)}(x), \quad \text{pour } n \geq 1 \end{cases}$$

o $F_n^{(k)}$ désigne la dérivé k-ième de la fonction F_n, k étant un entier positif.

Partie I

1) $P_1(x) = x$, $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1)$ $P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3-3x)$

2) comme $(x^2-1)^n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k x^{2n-2k}$, alors $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k \frac{d^n}{dx^n}(x^{2n-2k})$. Or $\forall m, p \in \mathbb{N}$ on a :

$$\frac{d^m}{dx^m}(x^p) = \begin{cases} p(p-1)\ldots(p-m+1) & \text{si } m \leq p \\ 0 & \text{si } m > n \end{cases}$$

Il en résulte que pour $0 \leq k \leq n$, on obtient
$\frac{d^n}{dx^n}(x^{2n-2k}) = (2n-2k)(2n-2k-1)\ldots(n-2k)x^{n-2k}$, si $n \leq 2n-2k$. Ce qui entraine que $2k \leq n$, par suite $k \leq [\frac{n}{2}]$.
Ainsi $\frac{d^n}{dx^n}(x^{2n-2k}) = \frac{(2n-2k)!}{(n-2k)!}x^{n-2k}$, avec $k \leq [\frac{n}{2}]$.
D'o $P_n(x) = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \frac{(-1)^k(2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!}x^{n-2k}$

3) a) P_n ont pour degré n le coefficient dominant est $\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2} = \frac{C_{2n}^n}{2^n}$.

b) que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
$$P_n(-x) = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \frac{(-1)^k(2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!}(-x)^{n-2k} = (-1)^n P_n(x)$$

c) Il est clair que $P_{2m+1}(0) = 0$ d'après la question précedente, pour $n = 2m$ d'après l'expression de P_{2m} on a $P_{2m}(0) = \frac{(-1)^m(2m)!}{2^{2m}(m!)^2}$.

Partie II

1) En remarquant que $(x^2-1)^n = (x-1)^n(x+1)^n$, on obtient par la formule de Leibniz :

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{d^k}{dx^k}(x-1)^n \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}(x+1)^n.$$

Comme $\frac{d^k}{dx^k}(x-1)^n = \frac{n!}{(n-k)!}(x-1)^{n-k}$ de mônome $\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}(x+1)^n = \frac{n!}{k!}(x+1)^k$.
Il en résulte:
$P_n(x) == \sum_{k=0}^{n} \frac{(C_n^k)^2}{2^n}(x-1)^k(x+1)^{n-k}$

2) D'après la question précedente, on peut écrire $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(C_n^k)^2}{2^n}(x-1)^k(x+1)^{n-k} + \frac{1}{2^n}(x+1)^n$. En déduire que $P_n(1) = 1$ et comme $P_n(-1) = (-1)^n P_n(1) = (-1)^n$.

3) Comme on a $P_n(x) == \sum_{k=0}^{n} \frac{(C_n^k)^2}{2^n}(x-1)^k(x+1)^{n-k}$, il résulte que $P_n(0) == \sum_{k=0}^{n} \frac{(C_n^k)^2}{2^n}(-1)^k$ et d'après $PartieI - 3 - b$ on a.

$$\sum_{k=0}^{n}(C_n^k)^2(-1)^k = 2^n P_n(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2m+1 \\ \dfrac{(-1)^m(2m)!}{(m!)^2} & \text{si } n = 2m \end{cases}$$

4) a) D'après l'expression de $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(C_n^k)^2}{2^n}(x-1)^k(x+1)^{n-k}$, il est clair que le coefficient de de x^n est $\sum_{k=0}^{n} \frac{(C_n^k)^2}{2^n}$ d'une part d'autre part d'aprés la question $PartieI - 3 - a$ le coefficient de x^n est $\frac{C_{2n}^n}{2^n}$ donc $\sum_{k=0}^{n}(C_n^k)^2 = C_{2n}^n$.

b) Comme $x \in [-1, 1]$,donc $|x-1| \leq 2$ et $|x+1| \leq 2$ on a:
$|P_n(x)| \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{(C_n^k)^2}{2^n}|x-1|^k|x+1|^{n-k} \leq \sum_{k=0}^{n}(C_n^k)^2 = C_{2n}^n$.

Partie III

1) a) F_n est une fonction polynôme admettant 1 et -1 comme racines d'ordre n alors pour tout k un entier tel que $0 \leq k \leq n-1$, on a $F_n^{(k)}(-1) = F_n^{(k)}(1) = 0$.

b) pour tout $n \geq 1$, on a
$$\int_{-1}^{1} P_n(t)dt = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2^n n!} F_n^{(n)}(t)dt = \frac{1}{2^n n!}\left[F_n^{(n)}(1) - F_n^{(n)}(-1)\right] = 0.$$

2) a) Soit k un entier tel que $0 \leq k \leq n-1$, après k intégrations par parties on a
$$\int_{-1}^{1} t^k P_n(t)dt = \frac{(-1)^k k!}{2^n n!}\int_{-1}^{1} F_n^{(n-k)}(t)dt = \frac{(-1)^k k!}{2^n n!}\left[F_n^{(n-k-1)}(t)\right]_{-1}^{1} = 0.$$

b) pour tout polynôme P de degré strictement inférieur à n , on a :
$\int_{-1}^{1} P(t)P_n(t)dt = 0$, d'après la linéarité de l'intégrale et la question précedente.

3) a) pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a:
$J_0 = 2$ et pour $n \geq 1$, par intégration par partie deux fois,
$J_n = \int_{-1}^{1}(x^2-1)^n dx = -\frac{2n}{2n+1}J_{n-1}$, en déduire que $J_n = (-1)^n \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_{-1}^{1} t^n P_n(t)dt = \frac{1}{2^n n!}\int_{-1}^{1} t^n F_n^{(n)}(t)dt$, par intégration n fois, on trouve :
$$\int_{-1}^{1} t^n P_n(t)dt = \frac{(-1)^n}{2^n}\int_{-1}^{1} F_n(t)dt = \frac{(-1)^n}{2^n}J_n = \frac{2^{n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

4) Si $m \neq n$, on peut supposer $m < n$. Dans ce cas $\int_{-1}^{1} P_m(t)P_n(t)dt = 0$ d'après $PartieIII - 2 - b$.
Si $m = n$, dans ce cas on peut écrire $P_n(t) = \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}t^n + Q_{n-1}$ avec $deg(Q_{n-1} < n$.
$\int_{-1}^{1} P_m(t)P_n(t)dt = \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}\int_{-1}^{1} t^n P_n(t)dt + \int_{-1}^{1} Q_{n-1}(t)P_n(t)dt = \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}\int_{-1}^{1} t^n P_n(t)dt = \frac{2}{2n+1}$.

finalement on a : $\int_{-1}^{1} P_m(t)P_n(t)dt = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ \frac{2}{2n+1} & \text{si } m = n \end{cases}$

Partie IV

On désigne par $\mathcal{E}$, l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.

1) $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ est une base de $\mathcal{E}$, car est une fammille de cardinal $n+1 = \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{E}$ échelonné en degré.

2) Puisque $\int_{-1}^{1} P_m(t)P_n(t)dt = \frac{2}{2n+1}\delta_{m,n}$, donc pour tout $0 \leq k \leq n$, on a $\frac{2}{2k+1}a_k = \int_{-1}^{1} P(t)P_k(t)dt$, par suite $a_k = \frac{2k+1}{2}\int_{-1}^{1} P(t)P_k(t)dt$.

Partie IV

On désigne par $\mathcal{E}$, l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.

1) Montrer que $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ est une base de $\mathcal{E}$.

2) Soit $P = \sum_{j=0}^{n} a_j P_j$ un élément de $\mathcal{E}$. Montrer que pour tout $0 \leq k \leq n$, on a : $a_k = \frac{2k+1}{2}\int_{-1}^{1} P(t)P_k(t)dt$.

3) Décomposer sur la base $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ le polynôme Q défini par : $Q(x) = xP_{n-1}(x)$ pour $n \geq 2$.

4) En déduire que les polynômes P_n satisfont à la relation de récurrence :

$$\forall n \geq 2, \quad nP_n(x) - (2n-1)xP_{n-1}(x) + (n-1)P_{n-2}(x) = 0 \qquad (1)$$

Partie V

On considère la série entière réelle $\sum_{n \geq 0} P_n(x)t^n$ de la variable t, x étant considéré comme un paramètre réel vérifiant $-1 \leq x \leq 1$.

b)) comme $\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ est développable en série entière et sa série entière est $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}t^{2k}$,
d'autre part $f(t,0)=\displaystyle\sum_{n\geq 0}P_n(0)t^n$ or $P_{2n+1}(0)=0$ et $P_{2m}(0)=\dfrac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$ on tire que $f(t,0)=\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}t^{2n}$ et par identification on a $f(t,0)=\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$.

c) A l'intérieur de son disque de convergence la fonction $f(t,x)$est indéfiniment dérivable par rapport t et on a $ft(t,x)=\displaystyle\sum_{n\geq 0}nP_n(x)t^{n-1}$ en identifiant on obtient l'équation desirée.

$$(t^2-2xt+1)ft(t,x)+(t-x)f(t,x)=0.$$

d) Par resolution de l'équation différentiel de premiere ordre en t on obtient $f(t,x)=\dfrac{1}{\sqrt{t^2-2xt+1}}$.