Corrigé sujet Physique - Chimie

Préliminaire

1.

. $u \mapsto u^{x-1}e^{-u}$ et $u \mapsto u^{x-1}$ sont positives sur $]0,1]$ et $u^{x-1}e^{-u} \leq u^{x-1}$.

$\int_0^1 u^{x-1}du$ converge pour x>0 donc $\int_0^1 u^{x-1}e^{-u}du$ converge pour x>0.

. $\lim_{u\to+\infty} u^2\left(u^{x-1}e^{-u}\right)=0$ donc il existe A>0 tel que $0 \leq u^{x-1}e^{-u} \leq \frac{1}{u^2}$,$u \geq A$.

On en déduit que $\int_1^{+\infty} u^{x-1}e^{-u}du$ converge .

Par conséquent $x \mapsto \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} u^{x-1}e^{-u}du$ est définie sur $]0,+\infty[$.

2. Pour tout réel $x > 0$,

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} u^x e^{-u}du = \left[-u^x e^{-u}\right]_0^{+\infty} + x\int_0^{+\infty} u^{x-1}e^{-u}du = x\Gamma(x).$$

Partie 1

Soit φ l'application qui à tout $P \in F$ associe la fonction polynomiale

$$\varphi(P): t \mapsto t\frac{d^2P}{dt^2}(t) + (-t+\alpha+1)\frac{dP}{dt}(t).$$

1. Pour tout $P \in F_m$, $\deg\varphi(P) \leq m$, donc $\varphi(P) \in F_m$.

En utilisant la linéarité de la dérivée, on obtient

$\varphi(\alpha P + \beta Q) = \alpha\varphi(P) + \beta\varphi(Q)$, pour tout $P,\ Q \in F_m$ et $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$.

Ainsi la restriction de φ à F_m est un endomorphisme que l'on notera φ_m.

2. $\varphi(v_0) = 0v_0$.

Pour $1 \leq k \leq m$, $\varphi(v_k) = -kv_k + \left(k^2+\alpha k\right)v_{k-1}$ d'où

$$mat_B(\varphi_m) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha+1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & -1 & & . & & & . \\ . & 0 & & & 0 & & . \\ . & & . & & k^2+\alpha k & . & . \\ . & & & . & -k & & 0 \\ . & & & & 0 & & m^2+\alpha m \\ 0 & 0 & . & . & . & 0 & -m \end{pmatrix}$$

3. φ_m possède les m valeurs propres simples $-k$, $0 \leq k \leq m$.

De plus $\dim F_m = m+1$, il en résulte que φ_m est diagonalisable.

4. $L_j^\alpha : t \mapsto \frac{1}{j!}t^{-\alpha}e^t \frac{d^j}{dt^j}\left(t^{\alpha+j}e^{-t}\right)$, $t > 0$.

On déduit de la formule de Leibniz que

$$L_j^\alpha(t)=\frac{1}{j!}e^t t^{-\alpha}\sum_{\ell=0}^{j}\binom{j}{\ell}\frac{d^\ell(e^{-t})}{dt^\ell}\frac{d^{j-\ell}(t^{\alpha+j})}{dt^{j-\ell}}$$

$$=\frac{1}{j!}t^{-\alpha}\sum_{\ell=0}^{j}\binom{j}{\ell}(-1)^\ell(\alpha+j)\ldots(\alpha+\ell+1)t^{\alpha+\ell}$$

$$=\sum_{\ell=0}^{j}\binom{j+\alpha}{j-\ell}\frac{(-1)^\ell}{\ell!}t^\ell.$$

5. . Le calcul donne

$L_0^\alpha(t)=1$, $L_1^\alpha(t)=-t+(1+\alpha)$, $L_2^\alpha(t)=\frac{t^2}{2}-(2+\alpha)t+\frac{(2+\alpha)(1+\alpha)}{2}$,

$L_3^\alpha(t)=-\frac{t^3}{6}+(3+\alpha)\frac{t^2}{2}-\frac{(3+\alpha)(2+\alpha)}{2}t+\frac{(3+\alpha)(2+\alpha)(1+\alpha)}{6}$.

6. Soit m un entier naturel

a. $L_j^\alpha=\sum_{\ell=0}^{j}\binom{j+\alpha}{j-\ell}\frac{(-1)^\ell}{\ell!}v_\ell.$

$$\varphi_m\left(L_j^\alpha\right)=\sum_{\ell=0}^{j}\binom{j+\alpha}{j-\ell}\frac{(-1)^\ell}{\ell!}\varphi_m(v_\ell)$$

$$=\sum_{\ell=0}^{j}\binom{j+\alpha}{j-\ell}\frac{(-1)^\ell}{\ell!}(-\ell)v_\ell+\sum_{\ell=1}^{j}\binom{j+\alpha}{j-\ell}\frac{(-1)^\ell}{\ell!}\left(\ell^2+\alpha\ell\right)v_{\ell-1}$$

$$=-j\frac{(-1)^j}{j!}v_j+\sum_{\ell=0}^{j-1}\left[\binom{j+\alpha}{j-\ell}\frac{(-1)^\ell}{\ell!}(-\ell)+\binom{j+\alpha}{j-\ell-1}\frac{(-1)^{\ell+1}}{(\ell+1)!}\left((\ell+1)^2+\alpha(\ell+1)\right)\right]v_\ell.$$

Comme $\binom{j+\alpha}{j-\ell}\frac{(-1)^\ell}{\ell!}(-\ell)+\binom{j+\alpha}{j-\ell-1}\frac{(-1)^{\ell+1}}{(\ell+1)!}\left((\ell+1)^2+\alpha(\ell+1)\right)=-j\binom{j+\alpha}{j-\ell}\frac{(-1)^\ell}{\ell!}$,

il vient que $\varphi_m\left(L_j^\alpha\right)=-jL_j^\alpha$.

b. Il découle de ce qui précède que L_j^α est un vecteur propre associé à la valeur propre $-j$.

F_m est somme directe de ses sous- espaces propres, c'est-à-dire $F_m=\bigoplus_{j=0}^{m}\mathbb{R}L_j^\alpha$.

Partie 2

1. Soit $f,g\in E$.

$|f(t)g(t)|\le\frac{1}{2}\left(f^2(t)+g^2(t)\right)$ d'où $|f(t)g(t)|t^\alpha e^{-t}\le\frac{1}{2}\left(f^2(t)t^\alpha e^{-t}+g^2(t)t^\alpha e^{-t}\right)$.

Les fonctions $t\mapsto f^2(t)t^\alpha e^{-t}$ et $t\mapsto g^2(t)t^\alpha e^{-t}$ étant intégrables sur $[0,+\infty[$, il en est de même pour la fonction $t\mapsto f(t)g(t)t^\alpha e^{-t}$.

2. Pour tout $f,g \in E$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, la fonction

$$t \mapsto (\alpha f(t)+\beta g(t))^2 t^\alpha e^{-t} = (\alpha f(t))^2 t^\alpha e^{-t} + 2\alpha f(t)\beta g(t) t^\alpha e^{-t} + (\beta g(t))^2 t^\alpha e^{-t}$$

est intégrable sur $[0,+\infty[$, comme somme de fonctions intégrables.

Par suite E est un sous-espace vectoriel de $C^0([0,+\infty[)$.

3. Il est clair que $\langle \mid \rangle$ est une forme bilinéaire symétrique sur E.

Soit $f \in E$. La fonction $t \mapsto f^2(t) t^\alpha e^{-t}$ étant continue et positive, il vient que

$$\langle f \mid f \rangle \geq 0 \qquad \text{et} \qquad \begin{aligned} \langle f \mid f \rangle = 0 &\Leftrightarrow f^2(t) t^\alpha e^{-t} = 0, \ \ t \in [0,+\infty[\\ &\Leftrightarrow f(t) = 0, \ \ t \in [0,+\infty[. \end{aligned}$$

Par conséquent $\langle \mid \rangle$ est un produit scalaire sur E.

4. Pour montrer que F est un sous-espace vectoriel de E, il suffit de montrer que la fonction $t \mapsto P^2(t) t^\alpha e^{-t}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$, pour tout $P \in F$.

Comme pour tout entier naturel k $\int_0^{+\infty} t^{2k} t^\alpha e^{-t} dt = \Gamma(2k+\alpha+1)$, la fonction $t \mapsto t^{2k} t^\alpha e^{-t}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$. Le résultat en découle.

5. Pour tout couple d'entiers naturels (j,k),

$$\langle v_j \mid v_k \rangle = \int_0^{+\infty} t^{k+j} t^\alpha e^{-t} dt = \Gamma(k+j+\alpha+1) .$$

Partie 3

1. Remarquons que pour tout $\ell \geq 1$, $u(v_\ell) = -v_\ell + (\ell+\alpha) v_{\ell-1}$.

Pour $j=0$, $u^0(v_k) = v_k$.

Supposons que pour tout $0 \leq j \leq k-1$, $u^j(v_k) = \sum_{\ell=k-j}^{k} \lambda_\ell v_\ell$.

Soit $0 \leq j+1 \leq k-1$,

$$\begin{aligned} u^{j+1}(v_k) &= \sum_{\ell=k-j}^{k} \lambda_\ell u(v_\ell) \\ &= \sum_{\ell=k-j}^{k} \lambda_\ell \left(-v_\ell + (\ell+\alpha) v_{\ell-1}\right) \\ &= \sum_{\ell=k-j}^{k} -\lambda_\ell v_\ell + \sum_{\ell=j-k}^{j} \lambda_\ell (\ell+\alpha) v_{\ell-1} \\ &= \sum_{\ell=k-j}^{k} -\lambda_\ell v_\ell + \sum_{\ell=k-j-1}^{k-1} \lambda_{\ell+1} (\ell+1+\alpha) v_\ell \end{aligned}$$

Ce qui prouve que $u^{j+1}(v_k)$ est une combinaison linéaire de $(v_\ell)_{k-j-1 \leq \ell \leq k}$

Comme pour tout $k \geq 1$, $0 \leq j \leq k-1$ et $k-j \leq \ell \leq k$, $v_\ell(0) = 0$, on en déduit que

Pour tous $k \geq 1$ et $0 \leq j \leq k-1$, $u^j(v_k)(0) = 0$ ou encore $u^j(v_k) \in G$.

2. Pour $k=0$, $L_0^\alpha = 1 = u^0(v_0)$.

On suppose que pour tout $k \geq 1$ et $0 \leq j \leq k-1$, $L_k^\alpha(t) = \frac{1}{k!} e^t t^{-\alpha} \frac{d^{k-j}}{dt^{k-j}}\left(u^j\left(t^k\right) t^\alpha e^{-t}\right)$,

Soit $j+1 \leq k-1$.

$$\begin{aligned} L_k^\alpha(t) &= \frac{1}{k!} e^t t^{-\alpha} \frac{d^{k-j}}{dt^{k-j}}\left(u^j\left(t^k\right) t^\alpha e^{-t}\right) \\ &= \frac{1}{k!} e^t t^{-\alpha} \frac{d^{k-j-1}}{dt^{k-j-1}}\left(\frac{d}{dt}\left(u^j\left(t^k\right) t^\alpha e^{-t}\right)\right) \\ &= \frac{1}{k!} e^t t^{-\alpha} \frac{d^{k-j-1}}{dt^{k-j-1}}\left(u^{j+1}\left(t^k\right) t^\alpha e^{-t}\right) \end{aligned}$$

Par conséquent pour tout $k \geq 1$ et $0 \leq j \leq k-1$, $L_k^\alpha(t) = \frac{1}{k!} e^t t^{-\alpha} \frac{d^{k-j}}{dt^{k-j}}\left(u^j\left(t^k\right) t^\alpha e^{-t}\right)$.

Pour tout $k \geq 1$,

$$L_k^\alpha(t) = \frac{1}{k!} e^t t^{-\alpha} \frac{d}{dt}\left(u^{k-1}\left(t^k\right) t^\alpha e^{-t}\right) = \frac{1}{k!} e^t t^{-\alpha}\left(u^k\left(t^k\right) t^\alpha e^{-t}\right) = \frac{1}{k!} u^k\left(v_k\right).$$

3. Soit $f \in F$ et $g \in G$,

$$\begin{aligned} \langle f \mid u(g)\rangle &= \int_0^{+\infty} f(t) e^t t^{-\alpha} \frac{d}{dt}\left(g(t) t^\alpha e^{-t}\right) t^\alpha e^{-t} dt \\ &= \left[f(t) g(t) t^\alpha e^{-t}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{df}{dt}(t)\left(g(t) t^\alpha e^{-t}\right) dt \\ &= -f(0) g(0) - \left\langle \frac{df}{dt} \middle| g \right\rangle \\ &= -\left\langle \frac{df}{dt} \middle| g \right\rangle. \end{aligned}$$

4. Pour $k=0$, $\langle f \mid L_0^\alpha\rangle = \langle f \mid v_0\rangle = \left\langle \frac{d^0 f}{dt^0} \middle| v_0 \right\rangle$.

Pour tout $k \geq 1$ et $1 \leq j \leq k$, $u^{k-j}\left(v_k\right)(0) = 0$, d'où

$$\langle f \mid L_k^\alpha\rangle = -f(0) u^{k-1}\left(v_k\right)(0) - \frac{1}{k!}\left\langle \frac{df}{dt} \middle| u^{k-1}\left(v_k\right)\right\rangle = -\frac{1}{k!}\left\langle \frac{df}{dt} \middle| u^{k-1}\left(v_k\right)\right\rangle.$$

En réitérant le même procédé jusqu'à l'ordre k, il vient que $\langle f \mid L_k^\alpha\rangle = \frac{(-1)^k}{k!}\left\langle \frac{d^k f}{dt^k} \middle| v_k \right\rangle$.

5. $\langle v_j \mid L_k^\alpha\rangle = \frac{(-1)^k}{k!}\left\langle \frac{d^k v_j}{dt^k} \middle| v_k \right\rangle$.

Pour $k > j$, $\langle v_j \mid L_k^\alpha\rangle = 0$.

Pour $k = j$, $\langle v_k \mid L_k^\alpha\rangle = \frac{(-1)^k}{k!}\left\langle \frac{d^k v_k}{dt^k} \middle| v_k \right\rangle = \frac{(-1)^k}{k!}\langle k! \mid v_k\rangle = (-1)^k \Gamma(k+\alpha+1)$.

Pour $k < j$, $\langle v_j \mid L_k^\alpha\rangle = \frac{(-1)^k}{k!} \frac{j!}{(j-k)!}\langle v_{j-k} \mid v_k\rangle = \binom{j}{k}(-1)^k \Gamma(j+\alpha+1)$.

6. Soit $(j\,,\,k)$ un couple d'entiers naturels distincts $(j\,,\,k)$ tel que $j<k$.

$$\left\langle L_j^\alpha \middle| L_k^\alpha \right\rangle = \frac{(-1)^k}{k\,!}\left\langle \frac{d^k L_j^\alpha}{dt^k} \middle| v_k \right\rangle.$$

Or L_j^α est un polynôme de degré j, d'où $\dfrac{d^k L_j^\alpha}{dt^k}=0$. Par suite $\left\langle L_j^\alpha \middle| L_k^\alpha \right\rangle = 0$.

7. $\left\|L_k^\alpha\right\|^2 = \left\langle L_k^\alpha \middle| L_k^\alpha \right\rangle$

$$= \frac{(-1)^k}{k\,!}\left\langle \frac{d^k L_k^\alpha}{dt^k} \middle| v_k \right\rangle = \frac{(-1)^k}{k\,!}\left\langle (-1)^k \frac{k\,!}{k\,!} v_0 \middle| v_k \right\rangle.$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{k\,!}.$$

8. a. Il est clair que $\left\langle q_{k+1} \middle| L_j^\alpha \right\rangle = \left\langle tL_k^\alpha \middle| L_j^\alpha \right\rangle = \left\langle L_k^\alpha \middle| tL_j^\alpha \right\rangle = \left\langle L_k^\alpha \middle| q_{j+1} \right\rangle$.

b. Le calcul donne $q_1 = -L_1^\alpha + (\alpha+1)L_0^\alpha$.

c. Le calcul donne $q_2 = -2L_2^\alpha + (3+\alpha)L_1^\alpha - (1+\alpha)L_0^\alpha$.

9. Soit un entier $k \geq 2$.

a. Pour tout $j \leq k-2$, $\left\langle q_{k+1} \middle| L_j^\alpha \right\rangle = \left\langle L_k^\alpha \middle| q_{j+1} \right\rangle = \dfrac{(-1)^k}{k\,!}\left\langle \dfrac{d^k q_{j+1}}{dt^k} \middle| v_k \right\rangle$.

Or $\dfrac{d^k q_{j+1}}{dt^k} = 0$ car q_{j+1} est un polynôme de degré $j+1<k$.

On en déduit que $\left\langle q_{k+1} \middle| L_j^\alpha \right\rangle = 0$, pour tout $j \leq k-2$,

b. $\left(L_j^\alpha\right)_{0\leq j\leq k+1}$ est une base orthogonale de F_{k+1}, il s'en suit que $q_{k+1} = \sum_{j=0}^{k+1} \beta_j L_j^\alpha$

où $\beta_i = \dfrac{\left\langle q_{k+1} \middle| L_j^\alpha \right\rangle}{\left\|L_j^\alpha\right\|^2}$, $0 \leq j \leq k+1$.

Rappelons que pour $j \leq k-2$, $\left\langle q_{k+1} \middle| L_j^\alpha \right\rangle = 0$. Par conséquent il existe des réels β_{k+1}, β_k et β_{k-1} tels que $q_{k+1} = \beta_{k+1}L_{k+1}^\alpha + \beta_k L_k^\alpha + \beta_{k-1}L_{k-1}^\alpha$.

c. Le calcul donne

$$\left\langle q_{k+1} \middle| L_{k+1}^\alpha \right\rangle = \frac{(-1)}{k\,!}\Gamma(k+\alpha+2) = -(k+1)\left\|L_{k+1}^\alpha\right\|^2,$$

$$\left\langle q_{k+1} \middle| L_{k-1}^\alpha \right\rangle = \frac{-(\alpha+k)}{(k-1)!}\Gamma(k+\alpha) = -(\alpha+k)\left\|L_{k-1}^\alpha\right\|^2.$$

d. Le calcul donne $\left\langle q_{k+1} \middle| L_k^\alpha \right\rangle = (2k+\alpha+1)\dfrac{\Gamma(k+\alpha+1)}{k\,!} = (2k+\alpha+1)\left\|L_k^\alpha\right\|^2$.

e. La relation $t\,L_k^\alpha(t) = -(k+1)L_{k+1}^\alpha(t) + (2k+\alpha+1)L_k^\alpha(t) - (k+\alpha)L_{k-1}^\alpha(t)$ découle de questions b. c. et d.

10. $\left(L_j^\alpha\right)_{0\leq j\leq k}$ est une base orthogonale de F_k,

il s'en suit que $t\,\dfrac{dL_k^\alpha}{dt}(t)=\sum_{j=0}^{k}\beta_j^{'}L_j^\alpha$ où $\beta_j^{'}=\dfrac{\left\langle t\,\dfrac{dL_k^\alpha}{dt}(t)\middle| L_j^\alpha\right\rangle}{\left\|L_j^\alpha\right\|^2}$, $0\le j\le k$.

Pour $j\le k-2$, $\left\|L_j^\alpha\right\|^2\beta_j^{'}=\left\langle \dfrac{dL_k^\alpha}{dt}(t)\middle| tL_j^\alpha\right\rangle=-\left\langle L_k^\alpha\middle| u\left(tL_j^\alpha\right)\right\rangle=\dfrac{(-1)^{k+1}}{k!}\left\langle \dfrac{d^k u\left(tL_j^\alpha\right)}{dt^k}\middle| v_k\right\rangle$,

Le polynôme $u\left(tL_j^\alpha\right)$ étant de degré $j+1<k$, on en déduit que $\beta_j^{'}=0$.

Le calcul donne $\beta_{k-1}^{'}=-(k+\alpha)$ et $\beta_k^{'}=k$.

Ainsi, $t\,\dfrac{dL_k^\alpha}{dt}(t)=kL_k^\alpha(t)-(k+\alpha)L_{k-1}^\alpha(t)$.

11. Soit p un entier naturel.

9. a. Il est clair que $b_0=a_0$.

Supposons que $b_m=\sum_{k=0}^{m}(-1)^{k+m}\binom{m+p}{k+p}a_k$. Il en résulte que

$$
\begin{aligned}
b_{m+1}&=a_{m+1}-\sum_{k=0}^{m}\binom{m+1+p}{k+p}b_k\\
&=a_{m+1}-\sum_{k=0}^{m}\binom{m+1+p}{k+p}\sum_{\ell=0}^{k}(-1)^{\ell+k}\binom{k+p}{\ell+p}a_\ell\\
&=a_{m+1}-\sum_{\ell=0}^{m}\sum_{k=\ell}^{m}\binom{m+1+p}{k+p}(-1)^{\ell+k}\binom{k+p}{\ell+p}a_\ell\\
&=a_{m+1}-\sum_{\ell=0}^{m}\binom{m+1+p}{\ell+p}(-1)^{\ell}a_\ell\sum_{k=\ell}^{m}\binom{m+1-\ell}{k-\ell}(-1)^k\\
&=a_{m+1}-\sum_{\ell=0}^{m}\binom{m+1+p}{\ell+p}a_\ell\sum_{k=0}^{m-\ell}\binom{m+1-\ell}{k}(-1)^k\\
&=a_{m+1}-\sum_{\ell=0}^{m}\binom{m+1+p}{\ell+p}a_\ell\left[(1-1)^{m+1-\ell}-(-1)^{m+1-\ell}\right]\\
&=a_{m+1}+\sum_{\ell=0}^{m}\binom{m+1+p}{\ell+p}(-1)^{m+1-\ell}a_\ell\\
&=\sum_{\ell=0}^{m+1}\binom{m+p+1}{\ell+p}(-1)^{m+1+\ell}a_\ell.
\end{aligned}
$$

b. En écrivant $L_m^p=\sum_{k=0}^{m}\binom{m+p}{m-k}\dfrac{(-1)^k}{k!}v_k=\sum_{k=0}^{m}\binom{m+p}{k+p}b_k$ avec $b_k=\dfrac{(-1)^k}{k!}v_k$.

On déduit de la question précédente que $\dfrac{t^m}{m!}=\sum_{k=0}^{m}\binom{m+p}{k+p}(-1)^k L_k^p(t)$.

Partie 4

Soit un entier $m \geq 1$ et g l'élément de F_m défini par

$$\begin{cases} g(t) = 1 & \text{si } L_m^\alpha \text{ ne possède pas de zéro de multiplicité impaire} \\ g(t) = (t - a_0)\dots(t - a_{s-1}) & \text{si } a_0, \dots, a_{s-1} \text{ sont les zéros de } L_m^\alpha \text{ de multiplicité impaire} \end{cases}$$

1. a. Si L_m^α ne possède pas de zéro de multiplicité impaire alors L_m^α garde un signe constant par conséquent $\langle L_m^\alpha | g \rangle \neq 0$.

Si $a_0, \dots, a_{s-1}$ sont les zéros de L_m^α de multiplicité impaire, alors $(t - a_0)\dots(t - a_{s-1})L_m^\alpha$ garde un signe constant par conséquent $\langle L_m^\alpha | g \rangle \neq 0$.

b. $\langle L_m^\alpha | g \rangle \neq 0$ implique que $\deg g = m$, par conséquent $s - 1 = m$, donc L_m^α possède m zéros distincts dans $[0, +\infty[$. De plus $L_m^\alpha(0) = \binom{\alpha + m}{m} \neq 0$, ainsi L_m^α possède m zéros distincts dans $]0, +\infty[$.

2. Soit $a_0, \dots, a_{m-1}$ les zéros de L_m^α.

a. Pour tout entier $0 \leq k \leq m - 1$, on désigne par δ_k la forme linéaire sur F_{m-1} définie par $\delta_k(R) = R(a_k)$.

Pour montrer que $(\delta_k)_{0 \leq k \leq m-1}$ forment une base du dual F_{m-1}^* de F_{m-1}, il suffit de montrer que la famille $(\delta_k)_{0 \leq k \leq m-1}$ est libre.

Soit $(\alpha_k)_{0 \leq k \leq m-1}$ des réels tels que $\sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k \delta_k = 0$.

On pose pour tout $0 \leq j \leq m - 1$, $R_j : t \mapsto \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{m-1} (t - a_k)$, il est clair que

$R_j(a_k) = 0,\ k \neq j$ et $R_j(a_j) \neq 0$.

$$\sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k \delta_k (R_j) = 0 \Rightarrow \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k R_j(a_k) = 0 \Rightarrow \alpha_j R_j(a_j) = 0 \Rightarrow \alpha_j = 0.$$

b. l'application $h : g \mapsto \int_0^{+\infty} g(t) t^\alpha e^{-t} dt$ est une forme linéaire sur F_{m-1}, il existe alors un unique $(\lambda_0, \dots, \lambda_{m-1}) \in \mathbb{R}^m$ tel que $h = \sum_{k=0}^{m-1} \lambda_k \delta_k$ ou encore pour tout g de F_{m-1},

$$\int_0^{+\infty} g(t) t^\alpha e^{-t} dt = \sum_{k=0}^{m-1} \lambda_k \delta_k(g) = \sum_{k=0}^{m-1} \lambda_k g(a_k).$$

c. Soit une fonction polynomiale P telle que $\deg(P) \leq 2m - 1$. Rappelons que $\deg(L_m^\alpha) = m$, on peut écrire $P = L_m^\alpha Q + R$ tels que $\deg(R) \leq m - 1$, on en déduit que $\deg(Q) \leq m - 1$ et que pour tout $0 \leq k \leq m - 1$, $P(a_k) = R(a_k)$.

D'autre part,

$$\int_0^{+\infty} P(t)\, t^\alpha e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} L_m^\alpha(t) Q(t)\, t^\alpha e^{-t} dt + \int_0^{+\infty} R(t)\, t^\alpha e^{-t} dt$$

$$= \left\langle L_m^\alpha \middle| Q \right\rangle + \int_0^{+\infty} R(t)\, t^\alpha e^{-t} dt$$

Or $\left\langle L_m^\alpha \middle| Q \right\rangle = 0$ car $\deg(Q) < m$, par conséquent

$$\int_0^{+\infty} P(t)\, t^\alpha e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} R(t)\, t^\alpha e^{-t} dt = \sum_{k=0}^{m-1} \lambda_k R(a_k) = \sum_{k=0}^{m-1} \lambda_k P(a_k)$$

Partie 5

1. Soit $t \in]0, 1]$, pour tout entier j, $\left|L_j^0(t)\right| \le \sum_{\ell=0}^{j} \binom{j}{\ell} \frac{t^\ell}{\ell!} \le \sum_{\ell=0}^{j} \binom{j}{\ell} t^\ell \le (1+t)^j \le 2^j$.

Or la série entière $\sum_{j\ge 0} 2^j x^j$ converge pour tout $x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$.

Par conséquent la série $\sum_{j\ge 0} L_j^0(t) x^j$ est convergente pour tout couple de réels (t, x) de $]0, 1] \times \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$.

Pour tout couple de réels (t,x) de $]0, 1] \times \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$, on pose $f(t,x) = \sum_{j=0}^{+\infty} L_j^0(t) x^j$.

2. $f(t, 0) = L_0^0(t) = 1$.

3. a. Pour tout $t \in]0, 1]$, la série entière $\sum_{j\ge 0} L_j^0(t) x^j$ est de classe C^1 sur $\left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$ par conséquent $(t, x) \mapsto f(t, x)$ admet une dérivée partielle par rapport à x sur $]0, 1] \times \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$.

D'autre part, soit $\beta \in]0, 1]$ et $t \in]\beta, 1]$

$$\left|\frac{dL_j^0}{dt}(t)\right| \le \sum_{\ell=1}^{j} \binom{j}{\ell} \frac{t^{\ell-1}}{(\ell-1)!} \le \frac{1}{t} \sum_{\ell=0}^{j} \binom{j}{\ell} t^\ell \le \frac{1}{\beta}(1+t)^j \le \frac{1}{\beta} 2^j.$$

Or la série entière $\frac{1}{\beta} \sum_{j\ge 0} 2^j x^j$ converge pour tout $x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$.

Par conséquent $(t, x) \mapsto f(t, x)$ admet une dérivée partielle par rapport à t sur $]0, 1] \times \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$.

b. $\frac{\partial f}{\partial t}(t, x) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{dL_j^0}{dt}(t) x^j$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(t, x) = \sum_{j=1}^{+\infty} j x^{j-1} L_j^0(t)$.

4. a. Pour tout entier j,

$$(j+1)L_{j+1}^0(t)-(j+1-t)L_j^0(t)=(j+1)L_{j+1}^0(t)-(j+1)L_j^0(t)+tL_j^0(t)$$
$$=(j+1)L_{j+1}^0(t)-(j+1)L_j^0(t)-(j+1)L_{j+1}^0(t)+(2j+1)L_j^0(t)-jL_{j-1}^0(t)$$
$$=j\left(L_j^0(t)-L_{j-1}^0(t)\right)=t\frac{dL_j^0}{dt}(t).$$

Ainsi $(j+1)L_{j+1}^0(t)=(j+1-t)L_j^0(t)+t\dfrac{dL_j^0}{dt}(t)$.

b. Montrer que pour tout (t,x) de $]0,1]\times\left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right[$,

$$t\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)=t\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{dL_j^0}{dt}(t)x^j=\sum_{j=0}^{+\infty}x^j\left((j+1)L_{j+1}^0-(j+1)L_j^0+tL_j^0\right)$$
$$=\sum_{j=1}^{+\infty}x^{j-1}(1-x)jL_j^0+(t-1)f(t,x)$$
$$=(1-x)\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)+(t-1)f(t,x)$$

5. On pose $f(t,x)=F\left(\dfrac{t}{1-x}\right)g(t)$, où F et g sont deux fonctions dérivables respectivement sur $]0,2[$ et $]0,1]$.

a. $\dfrac{\partial f}{\partial t}(t,x)=\dfrac{1}{1-x}\dfrac{dF}{dt}\left(\dfrac{t}{1-x}\right)g(t)+F\left(\dfrac{t}{1-x}\right)\dfrac{dg}{dt}(t)$

et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x)=\dfrac{t}{(1-x)^2}\dfrac{dF}{dx}\left(\dfrac{t}{1-x}\right)g(t)$.

De la relation $t\dfrac{\partial f}{\partial t}(t,x)-(1-x)\dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x)+(1-t)f(t,x)=0$, on déduit que

$$F\left(\frac{t}{1-x}\right)\left(t\frac{dg}{dt}(t)+(1-t)g(t)\right)=0.$$

b. Supposons qu'il existe t_0 tel que $F\left(\dfrac{t_0}{1-x}\right)$ soit nul.

Il en résulte que $f(t_0,x)=0$ pour tout x de $\left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right[$. Ce qui est impossible car $f(t_0,0)=1$

On en déduit que la fonction g est solution de l'équation différentielle

$$t\frac{dg}{dt}(t)+(1-t)g(t)=0.$$

Il existe alors une constante C telle que $g(t)=C\dfrac{e^t}{t}$.

Il vient que $f(t,x)=F\left(\dfrac{t}{1-x}\right)C\dfrac{e^t}{t}$. Or $f(t,0)=1$, on en déduit que $F(t)=\dfrac{te^{-t}}{C}$.

D'où $f(t,x)=\dfrac{t}{1-x}\dfrac{e^{-\frac{t}{1-x}}}{C}C\dfrac{e^t}{t}$ et $\dfrac{e^{-\frac{tx}{1-x}}}{1-x}=\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty}L_j^0(t)x^j$.