REPUBLIQUE TUNISIENNE
Ministère de l'Enseignement
Supérieur, de La Recherche Scientifique
et de La Technologie
Concours nationaux d'entrée
aux cycles de formation d'ingénieurs
Session 2008

الجمهورية التونسية
وزارة التعليم العالي
والبحث العلمي والتكنولوجيا

المناظرات الوطنية للدخول
إلى مراحل تكوين المهندسين
دورة 2008

Concours Physique et Chimie
Epreuve de Mathématiques

Durée : 4 H   Date : 2 Juin 2008   Heure : 8H   Nb de pages : 4

Barème : Préliminaire : 0.5pts. Partie 1 : 3.5pts - Partie 2 : 2pts - Partie 3 : 7pts.

Partie 4 : 3pts. Partie 5 : 4pts.

Une grande importance sera attachée à la rigueur du raisonnement, à la clarté et au soin de la présentation. L'usage des calculatrices n'est pas autorisé.
Il est rappelé que tout résultat énoncé dans le texte peut être utilisé pour traiter la suite, même s'il n'a pu être démontré.

Problème

Notations

Dans ce problème, on adopte les notations ci-dessous.
α est un réel positif.
$C^0([0,+\infty[) = \{f : [0,+\infty[\to \mathbb{R} \,;\, f \text{ continue}\}$.
$E = \{f \in C^0([0,+\infty[) \,;\, t \mapsto f^2(t) t^\alpha e^{-t} \text{ intégrable sur } [0,+\infty[\}$.
F est l'ensemble des fonctions polynomiales restreintes à $[0,+\infty[$.
Pour tout entier naturel m, $F_m = \{P \in F \,;\, \deg(P) \le m\}$.
Pour tout entier naturel k, v_k est la fonction définie par $v_k : t \mapsto t^k$.
Pour tout endomorphisme u de F, $u^0 = id_F$ et $u^k = u^{k-1} \circ u$, $k \in \mathbb{N}^*$.
$(L_j^\alpha)_{j \ge 0}$ est la suite de fonctions polynomiales de F définies par

$$L_j^\alpha : t \mapsto \frac{1}{j!} t^{-\alpha} e^t \frac{d^j}{dt^j}\left(t^{\alpha+j} e^{-t}\right), \ t > 0.$$

Pour tout réel δ et tout entier naturel m, les coefficients binomiaux $\binom{\delta}{m}$ sont définis par la relation de récurrence $\binom{\delta}{0} = 1$ et $\binom{\delta}{m} = \dfrac{\delta(\delta-1)\dots(\delta-m+1)}{m!}$, $m \ge 1$.

Préliminaire

1. Montrer que la fonction $x \mapsto \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} u^{x-1} e^{-u} du$ est définie sur $]0, +\infty[$.
2. Montrer que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ pour tout réel $x > 0$.

Partie 1

Soit φ l'application qui à tout $P \in F$ associe la fonction polynomiale

$$\varphi(P) : t \mapsto t \frac{d^2P}{dt^2}(t) + (-t + \alpha + 1)\frac{dP}{dt}(t).$$

1. Montrer que la restriction de φ à F_m est un endomorphisme que l'on notera φ_m.
2. Déterminer la matrice de φ_m dans la base canonique $B = (v_0, v_1, ..., v_m)$ de F_m.
3. En déduire les valeurs propres de φ_m et montrer qu'il est diagonalisable.
4. Montrer que pour tout entier naturel j, $L_j^\alpha(t) = \sum_{\ell=0}^{j} \binom{j+\alpha}{j-\ell} \frac{(-1)^\ell}{\ell!} t^\ell$.
5. Expliciter L_j^α pour $j = 0, 1, 2$ et 3.
6. Soit m un entier naturel.
   a. Montrer que pour tout entier $0 \le j \le m$, $\varphi_m\left(L_j^\alpha\right) = -jL_j^\alpha$.
   b. Montrer que $F_m = \bigoplus_{j=0}^{m} \mathbb{R}L_j^\alpha$, où $\mathbb{R}L_j^\alpha$ est la droite vectorielle engendrée par L_j^α.

Partie 2

1. Soit $f, g \in E$. Montrer que la fonction $t \mapsto f(t)g(t)t^\alpha e^{-t}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.
2. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $C^0([0,+\infty[)$.

Dans toute la suite du problème, on pose $\langle f \mid g\rangle = \int_0^{+\infty} f(t)g(t)t^\alpha e^{-t} dt$, pour tout $f, g \in E$.

3. Montrer que $\langle \ \mid \ \rangle$ est un produit scalaire sur E. On notera $\| \ \|$ la norme qui lui est associée.
4. Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
5. Expliciter $\langle v_j \mid v_k\rangle$ pour tout couple d'entiers (j, k).

Partie 3

Soit $G = \{P \in F ; P(0) = 0\}$ et u l'application linéaire qui à tout $P \in G$ associe la fonction de F définie par $u(P) : t \mapsto t^{-\alpha} e^t \frac{d}{dt}\left(P(t)t^\alpha e^{-t}\right)$.

1. Soit un entier $k \ge 1$. Montrer que pour tout entier $0 \le j \le k-1$, $u^j(v_k) \in G$.
2. Montrer que pour tout entier naturel k, $L_k^\alpha = \frac{1}{k!} u^k(v_k)$.

3. Montrer que pour tous $f \in F$ et $g \in G$, $\langle f | u(g) \rangle = -\left\langle \frac{df}{dt} \middle| g \right\rangle$.

4. Montrer que pour tout entier naturel k , $\langle f | L_k^\alpha \rangle = \frac{(-1)^k}{k!} \left\langle \frac{d^k f}{dt^k} \middle| v_k \right\rangle$.

5. Déterminer $\langle v_j | L_k^\alpha \rangle$, pour tout couple (j, k) d'entiers naturels.

6. Montrer que pour tout couple d'entiers naturels distincts(j,k), $\langle L_j^\alpha | L_k^\alpha \rangle = 0$.

7. Montrer que pour tout entier naturel k , $\|L_k^\alpha\|^2 = \frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{k!}$.

Pour tout entier naturel k, on pose $q_{k+1} : t \mapsto t\, L_k^\alpha(t)$.

8. a. Montrer que tout couple (j, k) d'entiers naturels, $\langle q_{k+1} | L_j^\alpha \rangle = \langle L_k^\alpha | q_{j+1} \rangle$.

   b. Montrer que $q_1 = -L_1^\alpha + (\alpha+1) L_0^\alpha$.

   c. Montrer que $q_2 = -2L_2^\alpha + (3+\alpha) L_1^\alpha - (1+\alpha) L_0^\alpha$.

9. Soit un entier $k \geq 2$.

   a. Montrer$\langle q_{k+1} | L_j^\alpha \rangle = 0$ pour tout couple (j, k) d'entiers naturels tels que $j \leq k-2$.

   b. En déduire qu'il existe des réels β_{k+1}, β_k et β_{k-1} tels que

$$q_{k+1} = \beta_{k+1} L_{k+1}^\alpha + \beta_k L_k^\alpha + \beta_{k-1} L_{k-1}^\alpha.$$

   c. Calculer $\langle q_{k+1} | L_{k+1}^\alpha \rangle$ et $\langle q_{k+1} | L_{k-1}^\alpha \rangle$.

   d. Montrer que $\langle q_{k+1} | L_k^\alpha \rangle = (2k+\alpha+1) \|L_k^\alpha\|^2$.

   e. En déduire la relation $t\, L_k^\alpha(t) = -(k+1) L_{k+1}^\alpha(t) + (2k+\alpha+1) L_k^\alpha(t) - (k+\alpha) L_{k-1}^\alpha(t)$.

10. Montrer que pour tout entier naturel non nul k, $t \frac{dL_k^\alpha}{dt}(t) = k L_k^\alpha(t) - (k+\alpha) L_{k-1}^\alpha(t)$.

11. Soit p un entier naturel.

   a. Soit $(a_k)_{k\geq 0}$ et $(b_k)_{k \geq 0}$ deux suites de nombres réels.

   Montrer l'implication $a_m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m+p}{k+p} b_k \Rightarrow b_m = \sum_{k=0}^{m} (-1)^{k+m} \binom{m+p}{k+p} a_k$.

   b. Montrer que pour tout entier naturel m, $\frac{t^m}{m!} = \sum_{k=0}^{m} \binom{m+p}{k+p} (-1)^k\, L_k^p(t)$.

Partie 4

Soit un entier $m \geq 1$ et g l'élément de F_m défini par

$$\begin{cases} g(t) = 1 & \text{si } L_m^\alpha \text{ ne possède pas de zéro de multiplicité impaire} \\ g(t) = (t-a_0)\ldots(t-a_{s-1}) & \text{si } a_0, \ldots, a_{s-1} \text{ sont les zéros de } L_m^\alpha \text{ de multiplicité impaire} \end{cases}$$

1. a. Montrer que $\langle L_m^\alpha | g \rangle \neq 0$.

   b. En déduire que L_m^α possède m zéros distincts dans $]0, +\infty[$.

2. Soit $a_0, \ldots, a_{m-1}$ les zéros de L_m^α.

a. Pour tout entier $0 \le k \le m-1$, on désigne par δ_k la forme linéaire sur F_{m-1} définie pa

$\delta_k(R) = R(a_k)$.

Montrer que les formes linéaires $(\delta_k)_{0\le k\le m-1}$ forment une base du dual F_{m-1}^* de F_{m-}

b. En déduire qu'il existe un unique $(\lambda_0, \ldots, \lambda_{m-1}) \in \mathbb{R}^m$ tel que pour tout g de F_{m-1},

$$\int_0^{+\infty} g(t) t^{\alpha} e^{-t} dt = \sum_{k=0}^{m-1} \lambda_k g(a_k).$$

c. Soit une fonction polynomiale P telle que $\deg(P) \le 2m-1$. En considérant la division euclidienne de P par L_m^α, montrer que

$$\int_0^{+\infty} P(t)\, t^{\alpha} e^{-t} dt = \sum_{k=0}^{m-1} \lambda_k P(a_k).$$

Partie 5

1. Montrer que la série $\sum_{j\ge 0} L_j^0(t) x^j$ est convergente pour tout couple de réels (t, x) de $]0, 1] \times \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$.

2. Pour tout couple de réels (t,x) de $]0, 1] \times \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$, on pose $f(t,x) = \sum_{j=0}^{+\infty} L_j^0(t) x^j$.

3. Déterminer $f(t, 0)$.

4. a. Montrer que $(t, x) \mapsto f(t, x)$ admet des dérivées partielles sur $]0, 1] \times \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$.

b. Déterminer $\frac{\partial f}{\partial t}(t, x)$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(t, x)$.

5. a. Montrer que pour tout entier j, $(j+1) L_{j+1}^0(t) = (j+1-t) L_j^0(t) + t \frac{dL_j^0}{dt}(t)$.

b. Montrer que pour tout (t, x) de $]0, 1] \times \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$,

$$t \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) - (1-x) \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) + (1-t) f(t, x) = 0,$$

6. On pose $f(t, x) = F\left(\frac{t}{1-x}\right) g(t)$, où F et g sont deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$.

a. Montrer que $F\left(\frac{t}{1-x}\right)\left(t \frac{dg}{dt}(t) + (1-t) g(t)\right) = 0$.

b. Etablir la relation $\frac{e^{-\frac{tx}{1-x}}}{1-x} = \sum_{j=0}^{+\infty} L_j^0(t) x^j$, pour tout (t, x) de $]0, 1] \times \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$