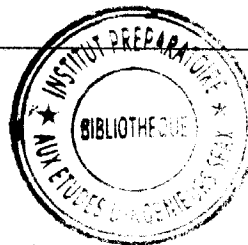
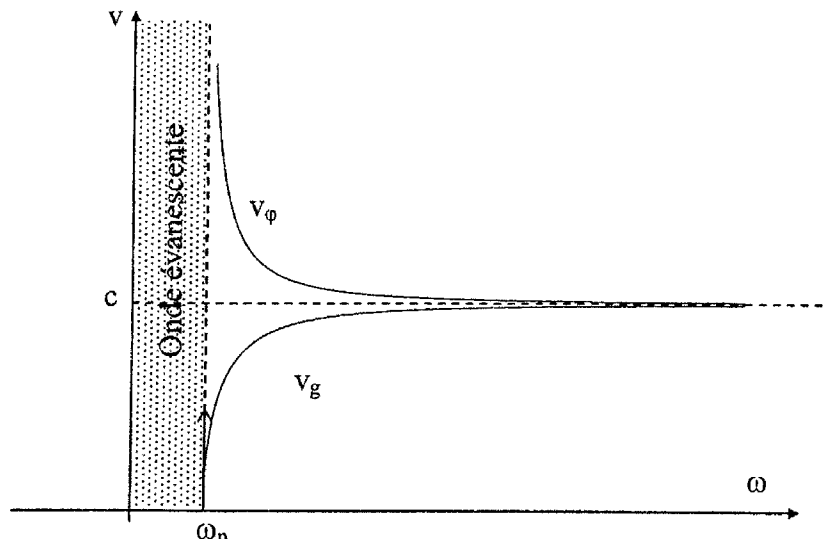


Problème 1 : (52/80)

Question	Barème
1-1- Dans le milieu considéré, les équations de Maxwell s'écrivent : $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho(M,t)}{\epsilon_0}$ (M-G) ; $\text{div} \vec{B} = 0$ (M-Φ) ; $\overline{\text{rot}} \vec{E}(M,t) = -\frac{\partial \vec{B}(M,t)}{\partial t}$ (M-F) $\overline{\text{rot}} \vec{B}(M,t) = \mu_0 \vec{j}(M,t) + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}(M,t)}{\partial t}$ (M-A)	4 × 0.25
1-2- <ul style="list-style-type: none"> $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho(M,t)}{\epsilon_0} \Rightarrow \oint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$: th de Gauss $\text{div} \vec{B} = 0 \Rightarrow \oint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$: le champ magnétique est à flux conservatif $\overline{\text{rot}} \vec{E}(M,t) = -\frac{\partial \vec{B}(M,t)}{\partial t} \Rightarrow e = -\frac{d\phi}{dt}$: loi de Faraday ; <p>Une variation temporelle de \vec{B} engendre un champ \vec{E} non uniforme.</p> <ul style="list-style-type: none"> $\overline{\text{rot}} \vec{B}(M,t) = \mu_0 \vec{j}(M,t) + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}(M,t)}{\partial t} \Rightarrow \oint_{(\Gamma)} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 (i + i_D)$: th d'Ampère généralisé 	0.5 + 0.5 + 0.5 + 0.5
2- RFD : <ul style="list-style-type: none"> Un électron : $m_e \frac{d\vec{v}_e}{dt} = -e(\vec{E} + \vec{v}_e \wedge \vec{B})$ Un proton : $m_p \frac{d\vec{v}_p}{dt} = +e(\vec{E} + \vec{v}_p \wedge \vec{B})$ 	0.5 + 0.5
3- $\frac{\ \vec{E}_m\ }{\ \vec{E}_e\ } = \frac{\ \vec{v}\ B}{E} < \frac{\ \vec{v}\ }{c} \ll 1$ puisque les porteurs de charges sont non relativistes.	0.5
4-1- En régime permanent : $\frac{d\vec{v}}{dt} \approx \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = i\omega \vec{v}$, d'où : $\vec{v}_e = i \frac{e}{m_e \omega} \vec{E}_0 \exp i(\omega t - kz)$; $\vec{v}_p = -i \frac{e}{m_p \omega} \vec{E}_0 \exp i(\omega t - kz)$	0.5 + 0.5
4-2- $\vec{j} = Ne \vec{v}_p - Ne \vec{v}_e = -i \frac{\epsilon_0 \omega_p^2}{\omega} \vec{E}_0 \exp i(\omega t - kz)$, avec $\omega_p^2 = \frac{Ne^2}{\epsilon_0} \left(\frac{1}{m_e} + \frac{1}{m_p} \right) = \frac{Ne^2}{\epsilon_0 \mu}$	1
5-1- $\omega_p = 0,44.10^8 \text{ rad.s}^{-1}$	0.5
5-2- $f_p = \frac{\omega_p}{2\pi} = 7 \text{ MHz}$, $\lambda_p = \frac{c}{f_p} = 42,84 \text{ m}$	0.5
5-3- $\omega_p^2 = \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m_e} \left(1 + \frac{m_e}{m_p} \right)$, $\frac{m_e}{m_p} = 5,45.10^{-3} \ll 1 \Rightarrow$ la contribution des ions à la densité de courant peut être négligée $\Rightarrow \vec{j} = -i \frac{\epsilon_0 \omega_p^2}{\omega} \vec{E}_0 \exp i(\omega t - kz)$, avec $\omega_p^2 \approx \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m_e}$.	0.5 + 0.5
6- $\vec{j} = \gamma \vec{E} \Rightarrow \gamma = -i \frac{\epsilon_0 \omega_p^2}{\omega}$.	0.5



<p>7- $\omega \neq \omega_0$:</p> <p>7-1- Equation de conservation de charge : $\text{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$</p> <p>$\Rightarrow \gamma \text{div} \vec{E} + i\omega \rho = 0 \Rightarrow \left(\frac{\omega_p^2}{\omega} - \omega \right) \rho = 0$, puisque $\omega \neq \omega_0$, $\rho = 0$</p>	0.75
<p>7-2- $\text{div} \vec{E} = 0 \Rightarrow i\vec{k} \cdot \vec{E} = 0$; $\text{div} \vec{B} = 0 \Rightarrow i\vec{k} \cdot \vec{B} = 0$; $\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} = \vec{B}$</p> <p>L'onde est transverse. Elle possède la structure d'une onde plane TEM.</p>	1
<p>8- démonstration : $\Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$, de même : $\Delta \vec{B} = \frac{1}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$</p>	1 + 0.5
<p>9- $\Delta \vec{E} = (-i\vec{k})^2 \vec{E} = \frac{1}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) (i\omega)^2 \vec{E} \Rightarrow \vec{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right)$: relation de dispersion</p>	0.75
<p>10- $n^2 = \frac{c^2}{\omega^2} k^2$</p>	0.5
<p>10-1- $n^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$</p>	
<p>10-2- • si $\omega < \omega_p$: $n = i\sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1}$ • si $\omega > \omega_p$: $n = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$</p>	0.5 + 0.5
<p>11- Propagation sans atténuation si \vec{k} est réel $\Rightarrow \vec{k}^2 > 0 \Rightarrow \omega > \omega_p$, soit $f > f_p$.</p> <p>Application : pour les liaisons satellites, il faut utiliser des ondes de fréquences $f > f_p$.</p>	0.5 0.5
<p>12- $\vec{E} = E_0 \vec{u}_x \Rightarrow \vec{E} = E_0 \exp i(\omega t - kz) \vec{u}_x$; $\vec{k} = n(\omega) k_0 \vec{u}_z$; $k_0 = \frac{\omega}{c}$; $n = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$</p> <p>D'où $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - k_0 n(\omega) z) \vec{u}_x$; $\vec{B} = \frac{n(\omega)}{c} E_0 \cos(\omega t - k_0 n(\omega) z) \vec{u}_y$</p>	0.5 + 0.5
<p>13- vitesse de phase : $v_\phi = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{n(\omega)} \Rightarrow v_\phi = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}} > c$; $v_\phi = v_\phi(\omega)$: milieu dispersif ; vitesse de groupe : $v_g = \frac{d\omega}{dk} \Rightarrow v_g = c \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} = c n(\omega) < c$; Pour tout $\omega > \omega_p$: $v_\phi v_g = c^2$</p>	0.5 + 0.5
	0.75

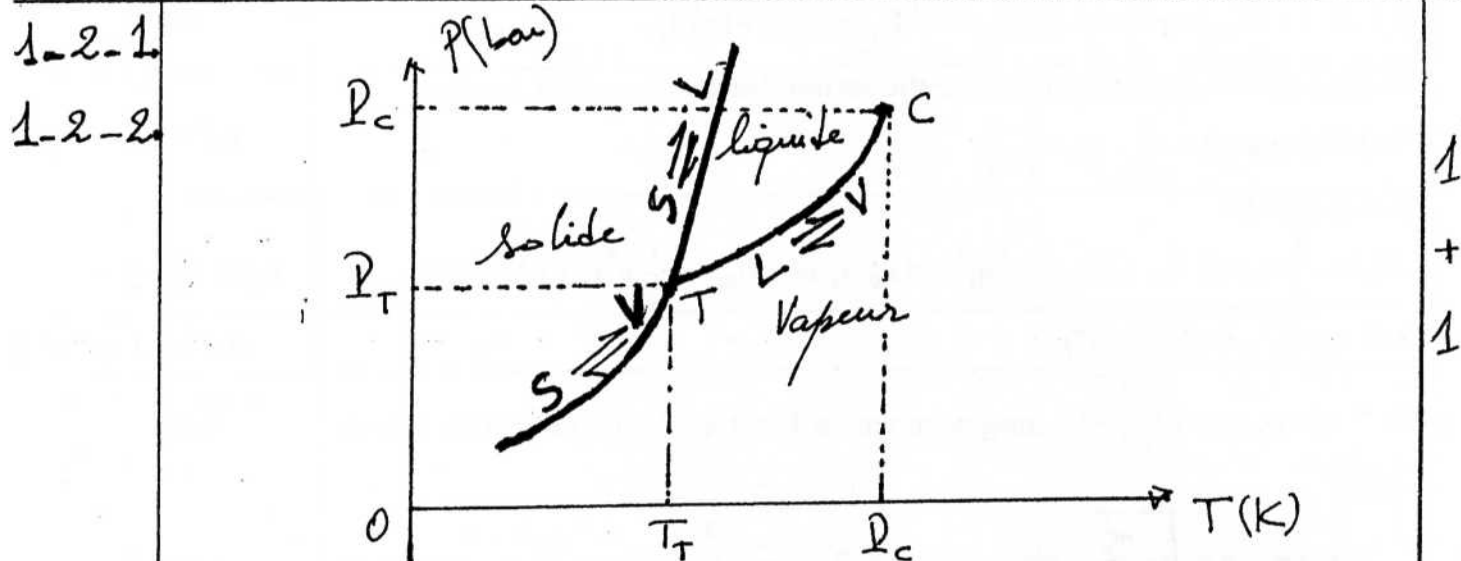
14-	$\vec{\Pi} = \vec{E} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \frac{n(\omega)}{\mu_0 c} E_0^2 \cos^2(\omega t - k_0 n(\omega) z) \vec{u}_z$; $\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2} c \epsilon_0 n(\omega) E_0^2 \vec{u}_z$	0.5
15-	$\langle u_{em} \rangle = \langle \epsilon_0 \frac{E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \rangle = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{4} \left(2 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right)$; $\langle e_c \rangle = N \langle \frac{1}{2} m_e v_e^2 \rangle = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{4} \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$	1 + 0.5
16-	$\langle u \rangle = \langle u_{em} + e_c \rangle = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2}$; En écrivant que : $\langle \vec{\Pi} \rangle = \langle u \rangle v_e \vec{u}_z$, on tire $v_e = c n(\omega) = v_g$: la vitesse de propagation de l'énergie s'identifie à la vitesse de groupe.	0.5 + 1
17-	$\omega < \omega_p$: \underline{k} est imaginaire pur , $\underline{k} = ik_0 \sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1} = ik_0 \lambda(\omega)$; $\lambda(\omega) \in \mathbb{R}_+$, le champ électrique de l'onde s'écrit : $\vec{E} = \vec{E}_0 \exp(-k_0 \lambda(\omega) z) \exp(i\omega t)$: pas de propagation (onde évanescente)	0.25 0.5
	Application : propagation des ondes Radio par réflexion sur l'ionosphère	0.5
18-	$f_{RT} = 684 \text{ kHz}$, $f_p = 7 \text{ MHz}$: $f_{RT} \ll f_p \Rightarrow$ les ondes émises par Radio Tunis ne peuvent se propager dans l'ionosphère. Leurs réflexions permettent d'atteindre des régions loin de Tunis.	0.75
19-	Equation de conservation de charge : $\underline{\rho} = \frac{\underline{k}}{\omega} \underline{j}_z$. En présence de \vec{B}_0 , les électrons sont soumis à la force de Lorentz $-e\vec{v}_e \wedge B_0 \vec{u}_z$ qui engendre un mouvement dans le plan perpendiculaire à (oz) $\Rightarrow j_z = 0 \Rightarrow \rho = 0$. L'équation de M-G, donne $E_z = 0$: \vec{E} est transverse.	1
20-1-	RFD : $m_e \frac{d\vec{v}_e}{dt} = -e(\vec{E} + \vec{v}_e \wedge \vec{B} + \vec{v}_e \wedge \vec{B}_0)$. En négligeant la force associée au champ magnétique de l'onde, on trouve : $i\omega \vec{v}_e = -\frac{e}{m_e} \vec{E} - \frac{eB_0}{m_e} \vec{v}_e \wedge \vec{u}_z$, on pose $\omega_c = \frac{eB_0}{m_e}$	0.5
	Le produit scalaire : $i\omega \vec{u}_z \cdot \vec{v}_e = 0$; le produit vectoriel : $i\omega \vec{u}_z \wedge \vec{v}_e = -\frac{e}{m_e} \vec{u}_z \wedge \vec{E} - \omega_c \vec{v}_e$	
	La combinaison de ces équations donne : $\vec{v}_e = \frac{i \frac{e}{m_e}}{\omega \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \right)} \left[\vec{E} - i \frac{\omega_c}{\omega} \vec{u}_z \wedge \vec{E} \right]$	1.5
	La densité de courant : $\vec{j} = -Ne\vec{v}_e = -i \frac{\epsilon_0 \omega_p^2}{\omega \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \right)} \left[\vec{E} - i \frac{\omega_c}{\omega} \vec{u}_z \wedge \vec{E} \right]$, $\omega_c = \frac{eB_0}{m_e}$,	0.5
	$\omega_p^2 = \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m_e}$	
	En présence de \vec{B}_0 , \vec{j} et \vec{E} ne sont plus colinéaires : le milieu devient anisotrope. On peut écrire une relation matricielle $\begin{bmatrix} \vec{j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{E} \end{bmatrix}$, où $\begin{bmatrix} \gamma \end{bmatrix}$ est la matrice conductivité du milieu.	0.5

20-2- $\underline{j}_x = -i \frac{\epsilon_0 \omega_p^2}{\omega \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right)} \left(E_x + i \frac{\omega_c}{\omega} E_y\right)$; $\underline{j}_y = -i \frac{\epsilon_0 \omega_p^2}{\omega \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right)} \left(-i \frac{\omega_c}{\omega} E_x + E_y\right)$	0.5 + 0.5
21- MF et MA donnent : $\underline{j} = -i \frac{\epsilon_0 c^2}{\omega} \left[\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right] \underline{\vec{E}}$	1
22-1- De ce qui précède, on déduit : $\begin{cases} \alpha \underline{E}_x - i\beta \underline{E}_y = 0 \\ i\beta \underline{E}_x + \alpha \underline{E}_y = 0 \end{cases}$ avec $\alpha = \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right) \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right) - \frac{\omega_p^2}{c^2}$ et $\beta = \frac{\omega_p^2}{c^2} \frac{\omega_c}{\omega}$	0.75 + 0.75
22-2- Solution non triviale si : $\alpha^2 - \beta^2 = 0$, soit $\left[\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right) \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right) - \frac{\omega_p^2}{c^2}\right]^2 - \left[\frac{\omega_p^2}{c^2} \frac{\omega_c}{\omega}\right]^2 = 0$: relation de dispersion	1
22-3- Solutions : $k_+^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + \omega_c)}\right)$; $k_-^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - \omega_c)}\right)$	0.5 + 0.5
23- k_+ est réel si $\omega > \frac{1}{2} \left[-\omega_c + \sqrt{\omega_c^2 + 4\omega_p^2}\right]$, k_- est réel si $\omega < \omega_c$ ou $\omega > \frac{1}{2} \left[\omega_c + \sqrt{\omega_c^2 + 4\omega_p^2}\right]$ k_+ et k_- sont tous les deux réels si $\omega > \frac{1}{2} \left[\omega_c + \sqrt{\omega_c^2 + 4\omega_p^2}\right]$	0.75 + 1 + 0.25
24-1- pour $k = k_+$: $\underline{E}_y = i \underline{E}_x$: la polarisation de l'onde est circulaire droite pour $k = k_-$: $\underline{E}_y = -i \underline{E}_x$: la polarisation de l'onde est circulaire gauche	0.75 + 0.75
24-2- $\underline{\vec{E}}_+ = E_{0+} (\underline{u}_x + i \underline{u}_y) \exp i(\omega t - k_+ z) = \underline{\vec{E}}_D$; $\underline{\vec{E}}_- = E_{0-} (\underline{u}_x - i \underline{u}_y) \exp i(\omega t - k_- z) = \underline{\vec{E}}_G$	0.5 + 0.5
24-3- $\underline{j}_+ = -i \frac{\epsilon_0 \omega_p^2}{\omega \left(1 + \frac{\omega_c}{\omega}\right)} \underline{\vec{E}}_+ \Rightarrow \underline{\gamma}_+ = -i \frac{\epsilon_0 \omega_p^2}{\omega \left(1 + \frac{\omega_c}{\omega}\right)} = \gamma_D$ $\underline{j}_- = -i \frac{\epsilon_0 \omega_p^2}{\omega \left(1 - \frac{\omega_c}{\omega}\right)} \underline{\vec{E}}_- \Rightarrow \underline{\gamma}_- = -i \frac{\epsilon_0 \omega_p^2}{\omega \left(1 - \frac{\omega_c}{\omega}\right)} = \gamma_G$	0.75 + 0.75
24-4- $n_+ = \frac{c}{\omega} k_+$; $n_- = \frac{c}{\omega} k_- \Rightarrow n_+ = \sqrt{\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + \omega_c)}\right)}$ et $n_- = \sqrt{\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - \omega_c)}\right)}$	0.5 + 0.5
25-1- En $z = 0$, $\underline{\vec{E}}_i = E_0 \exp(i\omega t) \underline{u}_x = \frac{E_0}{2} (\underline{u}_x + i \underline{u}_y) \exp(i\omega t) + \frac{E_0}{2} (\underline{u}_x - i \underline{u}_y) \exp(i\omega t)$ Dans le plasma, ces ondes se propagent (pour ω donnée) à des vitesses différentes : En $z = \ell$, $\underline{\vec{E}}_t = \frac{E_0}{2} (\underline{u}_x + i \underline{u}_y) \exp i(\omega t - k_+ \ell) + \frac{E_0}{2} (\underline{u}_x - i \underline{u}_y) \exp i(\omega t - k_- \ell)$, $\underline{\vec{E}}_t = E_0 \left(\cos \theta \underline{u}_x + \sin \theta \underline{u}_y\right) \exp i\left(\omega t - \frac{(k_+ + k_-)}{2} \ell\right)$, avec $\theta = \frac{(k_+ - k_-)}{2} \ell$ La polarisation de l'onde est rectiligne parallèlement à $\underline{u}_\theta = \cos \theta \underline{u}_x + \sin \theta \underline{u}_y$.	0.5 1 0.5
25-2- $\theta = \frac{(k_+ - k_-)}{2} \ell = \frac{\omega}{2c} (n_+ - n_-) \ell$	1

25-3- En optique : « polarisation rotatoire », observable dans certains cristaux, dans certaines substances (lévogyres, dextrogyres)...	0.5
26- $\vec{B}_i(M, t) = \frac{E_0}{c} \exp i(\omega t - k_0 z) \vec{u}_y$,	0.5
$\vec{B}_r(M, t) = -\frac{E_{0r}}{c} \exp i(\omega t + k_0 z) \vec{u}_y = -\frac{rE_0}{c} \exp i(\omega t + k_0 z) \vec{u}_y$	0.5
$\vec{B}_t(M, t) = \frac{n}{c} E_{0t} \exp i(\omega t - kz) \vec{u}_y = \frac{n}{c} E_0 \exp i(\omega t - kz) \vec{u}_y$	0.5
27- Continuité des composantes tangentielles des champs : $1 + \underline{r} = \underline{t}$ et $1 - \underline{r} = n \underline{t}$ On déduit que : $\underline{t} = \frac{2}{1 + n}$; $\underline{r} = \frac{1 - n}{1 + n}$	0.5 + 0.5
28-1- En $z = 0$: $\langle \vec{\Pi}_{0i} \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2 \vec{u}_z$, $\langle \vec{\Pi}_{0r} \rangle = \frac{1}{2} r ^2 \epsilon_0 c E_0^2 \vec{u}_z$ et $\langle \vec{\Pi}_{0t} \rangle = \frac{1}{2} t ^2 \epsilon_0 c E_0^2 \Re(\underline{n}^*) \vec{u}_z$	0.5 + 0.5 + 0.5
28-2- $R = r ^2$, $T = t ^2 \Re(\underline{n}^*)$	0.5 + 0.5
29- * $\omega < \omega_p$: $\underline{n} = i \sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1}$: imaginaire pur $\Rightarrow R = 1$ et $T = 0$: réflexion totale de l'onde	0.75
* $\omega > \omega_p$: $\underline{n} = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$: réel positif $\Rightarrow R = \left(\frac{1 - n}{1 + n}\right)^2$ et $T = \frac{4n}{(1 + n)^2}$: une partie de l'énergie est réfléchie, l'autre est transmise. $R + T = 1$: conservation de l'énergie	0.75
30-1- Ondes stationnaires : mode fondamental : $h = \frac{c}{2\nu} \Rightarrow \nu = \frac{c}{2h}$, A.N. : $\nu = 2,5 \text{ kHz}$	0.5 + 0.25
30-2- Bande AM : $f_{AM} \ll f_p$: réflexion totale sur l'ionosphère \Rightarrow possibilité de guidage entre la terre et l'ionosphère \Rightarrow ces ondes ont une longue portée.	0.5
Bande FM : $f_{FM} > f_p$: réflexion partielle sur l'ionosphère \Rightarrow perte d'énergie dans l'ionosphère \Rightarrow ces ondes ont une courte portée.	0.5

PROBLEME 2 : (28/80)

1-1. L'eau liquide, portée à la température $T = 100^\circ\text{C}$ sous la pression $P = 1 \text{ bar}$, subit une vaporisation. L'eau se trouve à l'état vapeur.



1-2-3. • Point triple: C'est une caractéristique intrinsèque d'un corps pur. En ce point le corps pur coexiste sous trois phases.

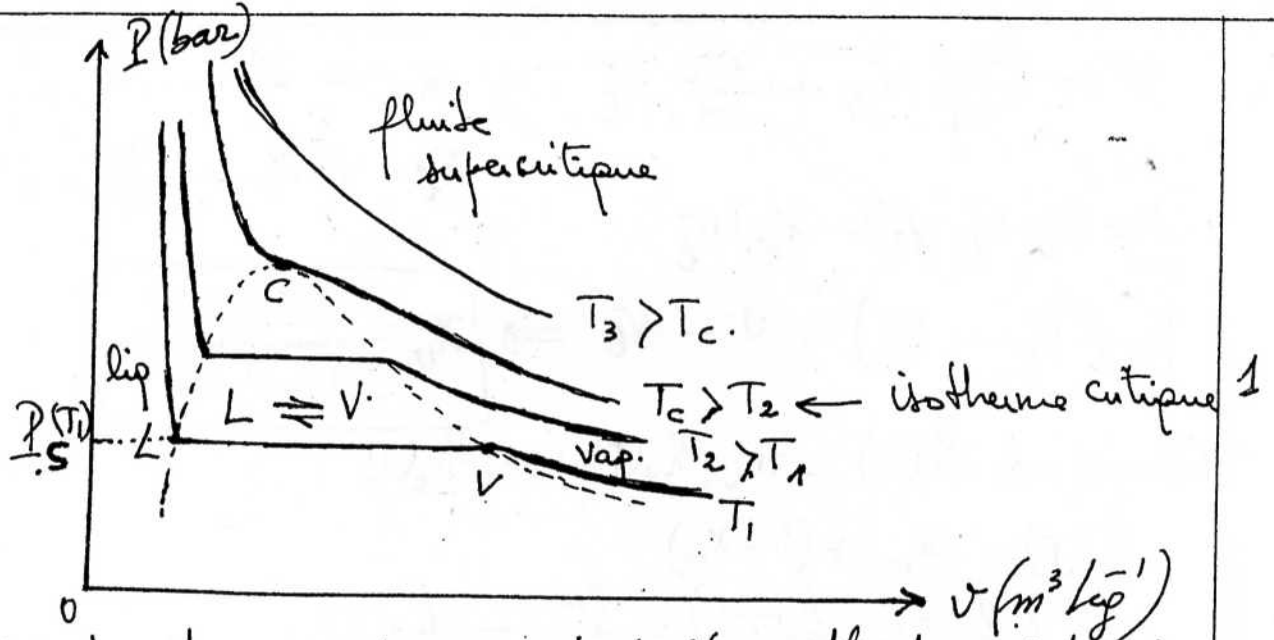
• Point critique: Propriété du corps pur. Au delà de ce point, la transition de phase liq - vapeur n'est plus observée. Les phases liquide et vapeur ne sont plus observées; il s'agit de l'état fluide.

0,75
0,75

1-2-4. Dans le diagramme (P.T.) de l'eau, la pente de la courbe (droite) de l'équilibre solide-liquide est négative. Ce comportement est dû à la diminution du volume massique du corps lors de la transition (glace \rightarrow eau). ($v_l < v_s$).

1

1-3-1.



• Courbe de rosée C.V. : c'est l'ensemble de points où la 1^{ère} goutte de liquide se forme à une température T .

• Courbe d'ébullition : c'est l'ensemble de points où la 1^{ère} bulle de la vapeur apparaît à T .

1-3.2. Si $T < T_c$: les isothermes d'Andréas présentent des paliers traduisant l'équilibre entre les phases liquide et vapeur.

Si $T = T_c$: l'isotherme critique présente un point d'inflexion et le palier disparaît ; la transition entre les phases liquide et vapeur n'est plus observée. Le fluide se trouve à l'état super-critique.

1-4 des grandeurs extensives volume et l'enthalpie du corps pur s'écrivent :

$$V = V_v + V_l \quad (1) \quad \text{et} \quad H = H_v + H_l \quad (2)$$

$$V = m v ; V_v = m_v v_v ; V_l = m_l v_l.$$

$$(1) \Rightarrow m v = m_v v_v + m_l v_l$$

$$v = \frac{m_v}{m} v_v + \frac{m_l}{m} v_l ; \quad x_v = \frac{m_v}{m}$$

$$x_l = 1 - x_v = \frac{m_l}{m}$$

$$v = x_v v_v + (1 - x_v) v_l$$

$$x_v (v_v - v_l) = v - v_l \Rightarrow x_v = \frac{v - v_l}{v_v - v_l}$$

0,75

$$\textcircled{2} \rightarrow m h(T) = m_v h_v(T) + m_l h_l(T)$$

$$h(T) = x_v + (1 - x_v)$$

$$x_v (h_v(T) - h_l(T)) = h(T) - h_l(T)$$

$$\Rightarrow x_v = \frac{h(T) - h_l(T)}{h_v(T) - h_l(T)}$$

0,75

$$1-5 \quad L_{\text{vap}}(T) = h_v(T) - h_l(T)$$

1

$$2-1- \quad s(x_v, T) = c_l \ln T + \frac{x_v}{T} L_v(T) + s_0$$

la variation de l'entropie est due à l'échauffement du liquide et au changement de phase.

A. l'intérieur du cylindre adiabatique, l'eau liquide subit une vaporisation. Le système est constitué de deux phases (lip - vap) en équilibre. La quasi-totalité du volume V_1 est occupé par la vapeur qui se comporte comme un gaz parfait.

1,5

$$V_1 = V_v + V_l \approx V_v$$

$$P_s V_1 = \frac{m_v}{M} R T \Rightarrow m_v = \frac{M P_s V}{R T}$$

$$\text{pour } T = 373 \text{ K} \rightarrow P_s = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$\text{A.N } m_v = \frac{18 \cdot 10^{-3} \times 10 \cdot 10^{-3} \cdot 1,013 \cdot 10^5}{8,314 \times 373} = 0,00588 \text{ kg} = 5,88 \text{ g}$$

$$x_v = \frac{m_v}{m} = \frac{5,88}{10} = 0,588 = 58,8\%$$

2-2. Détente adiabatique réversible \Rightarrow isentropique
 $s(x_v, T) = \text{cte.}$

$$\Rightarrow c_p \ln T_1 + \frac{x_{v1}}{T_1} L_v(T_1) = c_p \ln T_2 + \frac{x_{v2}}{T_2} L_v(T_2)$$

$$L_v(T_1) = h_v(T_1) - h_l(T_1) \quad ; \quad T_1 = 373 \text{ K}$$

$$L_v(T_2) = h_v(T_2) - h_l(T_2) \quad T_2 = 323 \text{ K.}$$

$$\frac{x_{v2}}{T_2} L_v(T_2) = \frac{x_{v1}}{T_1} L_v(T_1) + c_p \ln\left(\frac{T_1}{T_2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x_{v2} = x_{v1} \frac{T_2}{T_1} \frac{L_v(T_1)}{L_v(T_2)} + c_p \frac{T_2}{L_v(T_2)} \cdot \ln\left(\frac{T_1}{T_2}\right)}$$

$$L_v(T_1) = 2671,44 - 418,42 = 2253,02 \text{ kJ kg}^{-1}$$

$$L_v(T_2) = 2587,42 - 208,96 = 2378,46 \text{ kJ kg}^{-1}$$

$$\text{A.N. : } x_{v2} = 0,564 = 56,4 \%$$

3-1. Pour un système fermé S_f ; Σ : système ouvert.
 $dm_1 + M \Sigma(t) = dm_2 + M \Sigma(t+dt)$

dm_1 : masse qui rentre dans Σ pendant dt
 dm_2 " " sort de Σ " "

Le premier principe de la thermodynamique appliqué à un système fermé.

$$\frac{DU}{Dt} = \frac{SW}{dt} + \frac{SQ}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{dm_2}{dt} u_2 - \frac{dm_1}{dt} u_1$$

on a négligé les variations des énergies cinétique et potentielle de pesanteur.

écoulement permanent $\Rightarrow \frac{\partial U}{\partial t} = 0$

$$\delta W = \delta W_{\text{utile}} + \delta W_{\text{pression}}$$

$$\delta W_{\text{pression}} = P_1 dV_1 - P_2 dV_2 = P_1 v_1 dm_1 - P_2 v_2 dm_2$$

écoulement permanent $\Rightarrow dm_1 = dm_2 = dm$.

$$dm(u_2 - u_1) + (P_2 v_2 - P_1 v_1) dm = \delta W_u + \delta Q.$$

$$u_2 - u_1 = \Delta u ; P_2 v_2 - P_1 v_1 = \Delta(Pv)$$

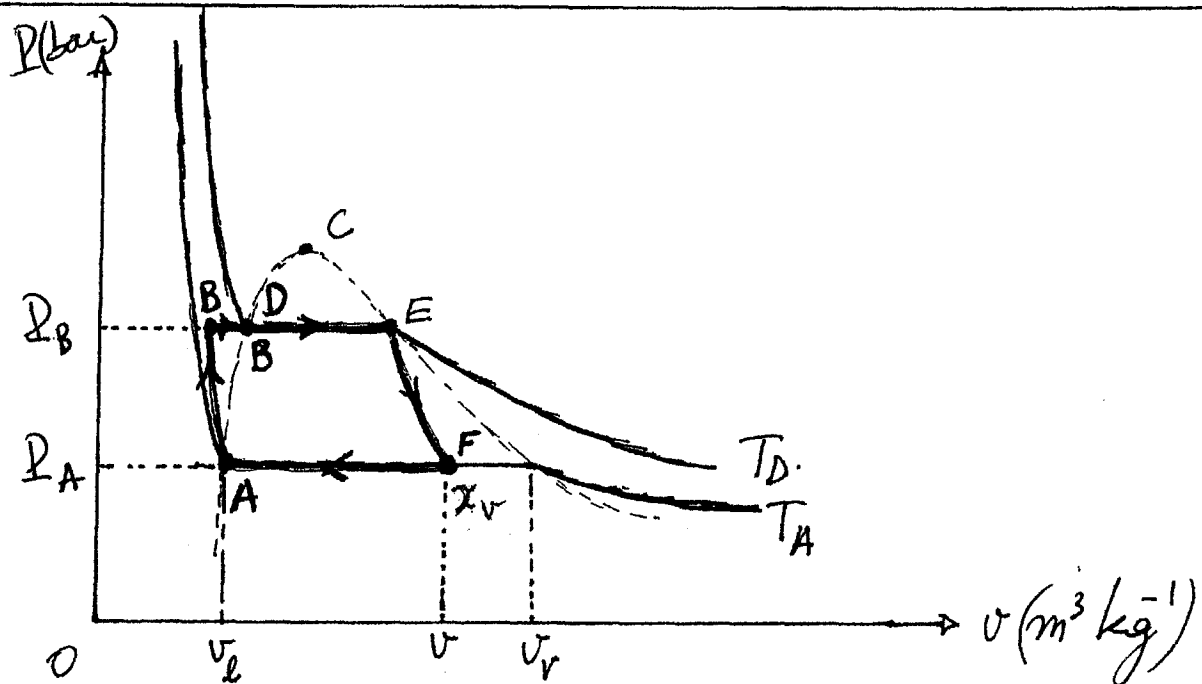
$$h = u + \Delta(Pv) \Rightarrow h = u + \Delta(Pv)$$

$$w_u = \frac{\delta W_u}{dm} ; q = \frac{\delta Q}{dm}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta h = q + w_u}$$

1,5

3-2.



2

3-3.

Dans la pompe d'alimentation, l'évolution entre A et B est une compression adiabatique réversible donc isentropique : $ds = 0$.

$$ds = C_p \frac{dT}{T} - \alpha v \frac{dp}{p} = 0$$

$$C_p \frac{dT}{T} = \alpha v \frac{dp}{p} \Leftrightarrow \frac{dT}{T} = \frac{\alpha v}{C_p} \frac{dp}{p}$$

$$\Leftrightarrow \ln \frac{T_B}{T_A} = \int_{P_A}^{P_B} \frac{\alpha v_l}{c_l} dp. = \frac{\alpha}{c_l} v_l (P_B - P_A)$$

$$\frac{T_B}{T_A} = \exp \left(\frac{\alpha}{c_l} v_l (P_B - P_A) \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{T_B = T_A \exp \left(\frac{\alpha}{c_l} v_l (P_B - P_A) \right)}$$

$$P_A = 0,056 \text{ } 10^5 \text{ Pa} \longrightarrow T_A = 308 \text{ K.}$$

$$P_B = 69,2 \text{ } 10^5 \text{ Pa} \longrightarrow T_B = ?$$

$$\begin{aligned} \text{A.N: } T_B &= 308 \exp \left(\frac{1,5 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-3} (69,2 - 0,056) \cdot 10^5}{4,18 \cdot 10^3} \right) \\ &= 308 \exp (2,48 \cdot 10^{-4}) = 308,08 \text{ K.} \end{aligned}$$

$$\Delta T = T_B - T_A = 0,08 \text{ K} \ll T_A = 308 \text{ K}$$

à l'état liquide, l'eau subit une faible élévation de température lors d'une forte compression.

3-4. Dans la turbine (évolution E \rightarrow F), la vapeur d'eau saturante subit une détente adiabatique réversible : isentropique ($s = \text{cte}$)

\Rightarrow le fluide est à l'état diphasé (lip-vap)

$$c_l \ln T_E + L_v(T_E) \cdot \frac{1}{T_E} = c_l \ln T_F + L_v(T_F) \cdot \frac{x_{vF}}{T_E}$$

$$T_E = T_D \text{ et } T_F = T_A$$

$$\Rightarrow \boxed{x_{vF} = \frac{T_A}{L_v(T_A)} c_l \ln \left(\frac{T_D}{T_A} \right) + \frac{L_v(T_D)}{L_v(T_A)} \cdot \frac{T_A}{T_D}}$$

1

$$x_{vF} = \frac{T_A}{h_v(T_A) - h_l(T_A)} C_p \ln\left(\frac{T_D}{T_A}\right) + \frac{h_v(T_D) - h_l(T_D)}{h_v(T_A) - h_l(T_A)} \frac{T_A}{T_D}$$

$$h_v(T_A) - h_l(T_A) = 2560,67 - 146,34 = 2414,33 \text{ kJ kg}^{-1}$$

$$h_v(T_D) - h_l(T_D) = 2768,83 - 1261,11 = 1507,72 \text{ kJ kg}^{-1}$$

$$T_A = 303 \text{ K} ; T_D = 558 \text{ K} \text{ et } C_p = 4,18 \text{ kJ K}^{-1} \text{ kg}^{-1}$$

$$\Rightarrow x_{vF} = 0,662 = 66,2 \%$$

l'enthalpie massique de l'eau à l'état F est:

$$h_F = x_{vF} h_v(T_A) + (1 - x_{vF}) h_l(T_A)$$

$$= 0,662 \times 2560,67 + 0,338 \times 146,34$$

$$= 1744,63 \text{ kJ kg}^{-1}$$

3-5.

q_1 : Transfert thermique échangé par la machine à vapeur par l'intermédiaire du Condenseur par unité de masse.

Transition $F \rightarrow A$: il s'agit d'une liquéfaction

$$q_1 = \Delta h = h_A - h_F ; \text{ avec } h_A = h_l(T_A)$$

$$q_1 = 146,34 - 1744,63 = -1598,28 \text{ kJ kg}^{-1}$$

$$\text{ou } q_1 = h_l(T_A) - (x_{vF} h_v(T_A) + (1 - x_{vF}) h_l(T_A))$$

$$= x_{vF} (h_l(T_A) - h_v(T_A)) = -x_{vF} L_v(T_A)$$

$$= -0,662 \times 2414,33 = -1598,29 \text{ kJ kg}^{-1}$$

$q_2 = ?$ Transfert thermique cédé par le cœŕle au circuit secondaire par unité de masse
 Dans le générateur de vapeur, on peut d com-
 poser la transformation en un échauffement
 isobare puis une vaporisation isobare et
 isotherme.

$$q_2 = \Delta h_{BE} = h_E - h_B = h_D - h_B + h_E - h_D$$

Pour l'échauffement isobare $dh = T ds = T c_p \frac{dT}{T}$
 $\Rightarrow dh = c_p dT$

$$\Leftrightarrow \Delta h_{BD} = c_p (T_D - T_B) \quad ; \quad T_B \approx T_A$$

$$\Rightarrow \underline{\Delta h_{BD} = c_p (T_D - T_A)}$$

• Pour la vaporisation

$$\Delta h_{DE} = h_E - h_D = h_v(T_D) - h_l(T_D)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow q_2 &= \Delta h_{BD} + \Delta h_{DE} \\ &= c_p (T_D - T_A) + h_v(T_D) - h_l(T_D) \end{aligned}$$

A.N : $q_2 = 4,18(558 - 308) + 2768,83 - 1261,11$
 $= 2552,72 \text{ kJ kg}^{-1}$

1,5

3-6. $\Delta h_{\text{cycle}} = q_1 + q_2 + w_u = 0$

Par application du 1^{er} principe de la thermodyna-
 mique pour un système ouvert.

$$\Rightarrow w_u = -(q_1 + q_2).$$

$$A.N: w_u = -(-1598,29 + 2552,72) = -954,43 \text{ kJ kg}^{-1}$$

w_u constitue la somme algébrique du travail cédé par la turbine à l'extérieur et le travail consommé par la pompe lors de la compression. 1,5

3-7.

$$\rho = \frac{\text{Grandeur valorisée}}{\text{Grandeur dépensée}} = \frac{-w_u}{q_2}$$

$$A.N: \rho = \frac{954,43}{2552,72} = 0,374 = 37,4\%.$$

1