Concours Mathématiques et Physique, Physique et Chimie, Technologie et Biologie et Géologie
Epreuve d'Informatique

Date : **Mardi 14 Juin 2005**	**Heure : 15 H**	**Durée : 2 H**	**Nombre de pages** : 4
Barème : Exercice 1 : 4 points	Exercice 2 : 4 points	Problème : 12 points	

L'usage des calculatrices est interdit.
Les exercices 1, 2 et le problème sont indépendants.

Exercice 1 :

Soit S le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} 2mx + 3y - 2z = 3 \\ x + y + z = m \\ 5x + 4my + 2z = 0 \end{cases}$$

où m est un paramètre réel.

Ecrire les commandes Maple permettant de :

1) Définir S.

2) Résoudre le système S de deux manières :

   2-1 en utilisant la commande *solve*

   2-2 en utilisant la bibliothèque de fonctions « *linalg* ». On notera par A la matrice du système et b le vecteur second membre.

3) Calculer le déterminant k de A.

4) Trouver les racines $m1$ et $m2$ de k.

5) Déterminer la matrice IA l'inverse de A, sachant que IA n'est définie que pour les valeurs de $m \neq m1$ et $m \neq m2$.

6) Soit la matrice B définie par :

$$B = \begin{pmatrix} x+y & x+2y & x+3y \\ 2x+y & 2x+2y & 2x+3y \\ 3x+y & 3x+2y & 3x+3y \end{pmatrix}$$

   6-1 Définir la fonction $f(i,j)$ permettant de construire les éléments de B avec i indice de ligne et j indice de colonne.

   6-2 Construire B en utilisant la fonction f définie en 6-1.

7) Calculer et afficher les produits matriciels AB et AB^T (B^T désigne la matrice transposée de B).

Exercice 2 :

Soit n un entier naturel, on définit la suite polynomiale d'ordre n, par la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} P_0(t) = 1 \\ P_1(t) = t \\ P_n(t) = \dfrac{2n-1}{n} t\, P_{n-1}(t) - \dfrac{n-1}{n} P_{n-2}(t) & \textbf{Pour } n > 1 \end{cases}$$

1) Ecrire une procédure Maple nommée *Legendre* qui reçoit comme paramètres t et n, et retourne comme résultat du polynôme $P_n(t)$ sous forme développée. On utilisera la commande prédéfinie ***expand*** de Maple.
2) Ecrire la commande Maple permettant de représenter sur le même graphique, l'allure des polynômes $P_4(t)$, $P_5(t)$ et $P_6(t)$ pour $-1 \le t \le 1$.

Problème :

Soient A et B deux tableaux à une dimension de N entiers strictement positifs. On se propose de définir, à partir des tableaux A et B triés par ordre décroissant, les polynômes P et Q fonction de x et y, développés selon les puissances décroissantes de x puis selon les puissances décroissantes de y en utilisant les définitions suivantes :

$$P = \sum_{i=1}^{N} A[i]x^{B[i]} + \sum_{i=1}^{N} B[i]y^{A[i]}$$

$$Q = \sum_{i=1}^{N} B[i]x^{A[i]} + \sum_{i=1}^{N} A[i]y^{B[i]}$$

Exemple :

Si A et B sont deux tableaux à 4 éléments :

A

1	2	5	4

B

3	1	4	6

Les tableaux A et B triés par ordre décroissant sont :

A

5	4	2	1

B

6	4	3	1

Les polynômes P et Q définis à partir de A et B triés sont :

$$P = 5\,x^6 + 4\,x^4 + 2\,x^3 + x + 6\,y^5 + 4\,y^4 + 3\,y^2 + y$$

$$Q = 6\,x^5 + 4\,x^4 + 3\,x^2 + x + 5\,y^6 + 4\,y^4 + 2\,y^3 + y$$

Travail Demandé :

Partie A : Algorithmique

On utilisera la constante NMAX et le type TAB définis par :

CONSTANTE NMAX=20

TYPE TAB = TABLEAU [1..NMAX] d'ENTIER

1) Ecrire une fonction algorithmique, sans paramètres, appelée **TAILLE**, qui permet de saisir un entier compris entre **1** et **NMAX** puis retourner ce même entier.

2) Ecrire une procédure algorithmique, appelée **REMPLIR_TABLEAU**, qui permet de remplir un tableau *T* avec des entiers strictement positifs et qui prend comme paramètres :

N : entier	paramètre donné passé par valeur
T : TAB	paramètre résultat passé par variable.

3) Dans la suite du problème, on précise l'hypothèse suivante :

On suppose que les éléments du tableau *T* saisis par la procédure **REMPLIR_TABLEAU** sont tous distincts.

On se propose de trier, par ordre décroissant, un tableau *T* en deux étapes selon le principe suivant :

- 1ère étape : *Création d'un tableau de compteurs.*

  Chaque élément du tableau *T* à trier est comparé à tous les autres afin de déterminer le nombre d'éléments qui lui sont strictement supérieurs. Les résultats des *N* comptages sont rangés dans un tableau de compteurs, appelé *C*, possédant lui aussi *N* éléments. Les valeurs du tableau *C* sont comprises entre **0** et **(N-1)** : le plus grand élément de *T* aura pour valeur du compteur **0** car il n'a aucun élément plus grand que lui et le plus petit élément aura pour valeur du compteur **(N-1)**.

  Exemple :

Tableau à trier :	***T***	1	2	5	4
Tableau de compteurs :	***C***	3	2	0	1

- 2ème étape : *Utilisation du tableau de compteurs pour le tri.*

  Le premier élément du tableau *T* à trier, est permuté avec l'élément dont le compteur est égal à **0**. Les éléments correspondants dans le tableau de compteurs sont aussi permutés. Le deuxième élément du tableau *T* est permuté avec l'élément de *C* égal à **1** et ainsi de suite. Ce processus est répété jusqu'à la valeur **(N-1)** de ***C***.

3-1 Ecrire une procédure algorithmique, appelée **COMPTAGE**, qui a pour rôle de remplir le tableau de compteurs *C* à partir du tableau *T* et qui prend comme paramètres :

N : entier	paramètre donné passé par valeur
T : TAB	paramètre donné passé par valeur
C : TAB	paramètre résultat passé par variable.

3-2 Ecrire une procédure algorithmique, appelée **TRI_TABLEAU**, pour trier par ordre décroissant un tableau *T*, selon le principe de tri détaillé précédemment, en utilisant la procédure **COMPTAGE** écrite en 3-1.

La procédure **TRI_TABLEAU** prend comme paramètres :

N : entier	paramètre donné passé par valeur
T : TAB	paramètre donné/résultat passé par variable.

4) Ecrire une procédure algorithmique, appelée **AFFICH_POLY**, qui affiche un polynôme de la forme :

$$\sum_{i=1}^{N} A[i]x^{B[i]} + \sum_{i=1}^{N} B[i]y^{A[i]}$$

sous le format donné par l'exemple suivant :

Exemple : Si ***P*** est un polynôme défini par :

$$P = 5\,x^4 + 3\,x^3 + 2\,x^2 + x + 4\,y^5 + 3\,y^3 + 2\,y^2 + y$$

Le format d'affichage du polynôme ***P*** sera :

P = 5x^4+3x^3+2x^2+x+4y^5+3y^3+2y^2+y

Cette procédure prend comme paramètres :

N : entier	paramètre donné passé par valeur
A : TAB	paramètre donné passé par valeur
B : TAB	paramètre donné passé par valeur.

5) Ecrire un algorithme principal **AFF_POLY_ORD** qui :

- permet de saisir le nombre ***N*** d'éléments, d'un tableau à une dimension, en appelant la fonction **TAILLE** écrite en 1) de la partie A.
- remplit un tableau ***A*** ensuite un tableau ***B*** avec des entiers strictement positifs en appelant la procédure **REMPLIR_TABLEAU** écrite en 2) de la partie A.
- trie le tableau ***A*** ensuite le tableau ***B*** en utilisant la procédure **TRI_TABLEAU** écrite en 3-2) de la partie A.
- affiche les polynômes ***P*** et ***Q*** (décrits au début du problème) selon les puissances décroissantes en x puis en y en appelant la procédure **AFFICH_POLY** écrite en 4) de la partie A.

Partie B : Maple

1) Traduire en Maple la procédure algorithmique **COMPTAGE** écrite en 3-1 de la partie A.
2) Traduire en Maple la procédure algorithmique **TRI_TABLEAU** écrite en 3-2 de la partie A.
3) Donner la commande Maple permettant d'ordonner un polynôme ***P*** selon les puissances décroissantes de ***x***.
4) Ecrire la commande Maple qui convertit le polynôme ***P*** en une fonction ***f*** à deux variables ***x*** et ***y***.
5) Donner la commande Maple pour définir le domaine de définition de la fonction ***f*** .
6) Donner la commande Maple pour définir l'expression de la dérivée première de ***f*** par rapport à ***x***.
7) Donner la commande Maple pour définir la fonction dérivée seconde de ***f*** par rapport à ***y***.