

PARTIE I

A - Etude des endomorphismes G_u , D_v et $G_u + D_v$.

1. (a) Soit $R = \sum_{i=0}^m a_i X^i \in \mathbb{C}[X]$. Alors, pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$,

$$R(G_u)(f) = \sum_{i=0}^m a_i G_u^i(f) = \sum_{i=0}^m a_i (u^i \circ f) = \left(\sum_{i=0}^m a_i u^i \right) \circ f = R(u) \circ f = G_{R(u)}(f).$$

D'où $R(G_u) = G_{R(u)}$.

(b)

$$\begin{aligned} R(u) = 0 &\iff \forall f \in \mathcal{L}(E), R(u) \circ f = 0 \\ &\iff \forall f \in \mathcal{L}(E), G_{R(u)}(f) = 0 \\ &\iff G_{R(u)} = R(G_u) = 0. \end{aligned}$$

- (c) u est diagonalisable \iff il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$ scindé à racines toutes simples dans \mathbb{C} tel que $Q(u) = 0 \iff$ il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$ scindé à racines toutes simples dans \mathbb{C} tel que $Q(G_u) = 0 \iff G_u$ est diagonalisable.

2. Même raisonnement que dans 1.

3. (a) Pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$, on a :

$$(G_u \circ D_v)(f) = G_u(f \circ v) = u \circ f \circ v = D_v(u \circ f) = (D_v \circ G_u)(f)$$

et donc $G_u \circ D_v = D_v \circ G_u$.

- (b) Soit $\lambda \in \text{Sp}_\mathbb{C}(G_u)$. Pour $g \in E_\lambda(G_u)$, montrons que $D_v(g) \in E_\lambda(G_u)$. En utilisant la question précédente, on a :

$$G_u(D_v(g)) = D_v(G_u(g)) = D_v(\lambda g) = \lambda D_v(g).$$

Donc $E_\lambda(G_u)$ est stable par D_v .

- (c) u et v étant supposés diagonalisables, donc par 1. et 2., G_u et D_v sont diagonalisables. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres deux à deux distinctes de G_u , alors on a :

$$\mathcal{L}(E) = \bigoplus_{i=1}^p E_{\lambda_i}(G_u).$$

Par 3.(b), pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, $E_{\lambda_i}(G_u)$ est stable par D_v . Il en résulte que la restriction $D_{v,i}$ de D_v à $E_{\lambda_i}(G_u)$ est un endomorphisme diagonalisable de $E_{\lambda_i}(G_u)$. Soit \mathcal{B}_i une base de $E_{\lambda_i}(G_u)$ formée par des vecteurs propres de $D_{v,i}$ (donc de D_v). Alors $(\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p)$ est une base de $\mathcal{L}(E)$ formée par des vecteurs propres communs à G_u et D_v .

- (d) La matrice de $\Theta_{u,v}$ dans la base $(\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p)$, définie dans 3. (c), est diagonale (somme de deux matrices diagonales), donc $\Theta_{u,v}$ est diagonalisable.

4. (a) • Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ les valeurs propres de u . On a $v \in \ker(\Theta_{u,-u}) \iff u \circ v = v \circ u$. Alors pour tout $j \in \{1, \dots, k\}$, $E_{\lambda_j}(u)$ est stable par v car pour tout $x \in E_{\lambda_j}(u)$, on a :

$$u(v(x)) = v(u(x)) = v(\lambda_j x) = \lambda_j v(x).$$

- Réciproquement, si pour tout $j \in \{1, \dots, k\}$, $E_{\lambda_j}(u)$ est stable par v alors

$$\forall z \in E_{\lambda_j}(u), \quad (u \circ v)(z) = \lambda_j v(z) = v(\lambda_j z) = (v \circ u)(z).$$

Ainsi u et v commutent sur tout $E_{\lambda_j}(u)$, $1 \leq j \leq k$, d'où u et v commutent sur

$E = \bigoplus_{j=1}^k E_{\lambda_j}(u)$, et $v \in \ker(\Theta_{u,-u})$. En conclusion

$$\ker(\Theta_{u,-u}) = \left\{ v \in \mathcal{L}(E); \forall \lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(u), E_{\lambda}(u) \text{ est stable par } v \right\}.$$

- (b) Pour $j \in \{1, \dots, k\}$, on note par \mathcal{T}_j une base de $E_{\lambda_j}(u)$ et on pose $\mathcal{T} = (\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_k)$. Alors $v \in \ker(\Theta_{u,-u})$ si et seulement si la matrice de v dans \mathcal{T} est de la forme

$$N = \begin{pmatrix} N_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & N_k \end{pmatrix}.$$

avec $N_j \in \mathcal{M}_{n_j}(\mathbb{C})$ et $n_j = \dim(E_{\lambda_j}(u))$. Il en résulte que

$$\dim(\ker(\Theta_{u,-u})) = \sum_{j=1}^k (\dim E_{\lambda_j}(u))^2.$$

- (c) i. Soient $j \in \{1, \dots, n\}$ et $x_j \in E_{\lambda_j}(u) \setminus \{0\}$. A noter que (x_1, \dots, x_n) est une base de E formée par des vecteurs propres de u . Comme $E_{\lambda_j}(u)$ est stable par v alors $v(x_j) \in E_{\lambda_j}(u)$. Mais λ_j est une valeur propre simple, donc $\dim E_{\lambda_j}(u) = 1$ et $E_{\lambda_j}(u) = \text{Vect}\{x_j\}$. Il existe alors $\mu_j \in \mathbb{C}$ tel que $v(x_j) = \mu_j x_j$ et x_j est un vecteur propre de v .

On conclut qu'une base de vecteurs propres de u est aussi base de vecteurs propres de v et donc v est diagonalisable.

- ii. La notion des polynômes d'interpolation de Lagrange assure l'existence d'un polynôme $R \in \mathbb{C}[X]$ tel que

$$R(\lambda_j) = \mu_j, \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}.$$

Donc pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, on a :

$$R(u)(x_j) = R(\lambda_j)x_j = \mu_j x_j = v(x_j).$$

Comme (x_1, \dots, x_n) est une base de E , alors $R(u) = v$.

B - Cas où $\dim(E) = 2$.

1. (a) Supposons que pour tout $x \in E$, $(x, u(x))$ est liée. Alors, pour tout $x \in E$, il existe $\lambda_x \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda_x x$.
- Pour $x = 0$, on a $u(x) = 0 = \lambda_x 0$ avec λ_x arbitraire dans \mathbb{K} .
 - Pour $x, y \in E \setminus \{0\}$, montrons que $\lambda_x = \lambda_y$.

- Si (x, y) est liée, il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $y = \alpha x$. Alors,

$$u(y) = \lambda_y y = u(\alpha x) = \alpha u(x) = \alpha \lambda_x x = \lambda_x y.$$

D'où $(\lambda_y - \lambda_x)y = 0 \Rightarrow \lambda_x = \lambda_y$ car $y \neq 0$.

- Si (x, y) est libre, alors

$$u(x + y) = \lambda_{x+y}(x + y) = \lambda_{x+y}x + \lambda_{x+y}y = u(x) + u(y) = \lambda_x x + \lambda_y y,$$

ce qui donne $(\lambda_{x+y} - \lambda_x)x + (\lambda_{x+y} - \lambda_y)y = 0$ et donc $\lambda_{x+y} = \lambda_x = \lambda_y$.

Par conséquent, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda x$ pour tout $x \in E$, c'est-à-dire u est une homothétie vectorielle de E de rapport λ ; absurdité.

En conclusion, il existe $\varepsilon_1 \in E$ tel que $(\varepsilon_1, u(\varepsilon_1))$ est libre.

- (b) Il est clair que $\text{Vect}(\text{id}_E, u) \subset \ker(\Theta_{u, -u})$. Montrons l'autre inclusion.

Soit $v \in \ker(\Theta_{u, -u})$. $(\varepsilon_1, u(\varepsilon_1))$ étant libre, elle forme une base de E . Il existe alors $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ tels que $v(\varepsilon_1) = \alpha \varepsilon_1 + \beta u(\varepsilon_1)$. Pour tout $x \in E$, il existe $a, b \in \mathbb{K}$ tels que $x = a\varepsilon_1 + bu(\varepsilon_1)$. Comme $u \circ v = v \circ u$, on aura :

$$\begin{aligned} v(x) &= av(\varepsilon_1) + bv(u(\varepsilon_1)) \\ &= a(\alpha \varepsilon_1 + \beta u(\varepsilon_1)) + bu(\alpha \varepsilon_1 + \beta u(\varepsilon_1)) \\ &= \alpha(a\varepsilon_1 + bu(\varepsilon_1)) + \beta u(a\varepsilon_1 + bu(\varepsilon_1)) \\ &= \alpha x + \beta u(x) \\ &= (\alpha \text{id}_E + \beta u)(x). \end{aligned}$$

D'où $v = \alpha \text{id}_E + \beta u \in \text{Vect}(\text{id}_E, u)$. En conclusion, $\ker(\Theta_{u, -u}) = \text{Vect}(\text{id}_E, u)$.

2. Soit $(\alpha_{ij})_{1 \leq i, j \leq 2}$ une famille d'éléments de \mathbb{K} telle que $\sum_{i,j=1}^2 \alpha_{ij} f_{ij} = 0$. Alors, pour tout $k \in \{1, 2\}$, on a :

$$\sum_{i,j=1}^2 \alpha_{ij} f_{ij}(\varepsilon_k) = 0 = \sum_{i,j=1}^2 \alpha_{ij} \delta_{jk} \varepsilon_i = \sum_{i=1}^2 \alpha_{ik} \varepsilon_i.$$

D'où

$$\sum_{i=1}^2 \alpha_{ik} \varepsilon_i = 0 \implies \alpha_{ik} = 0, \quad \forall 1 \leq i, k \leq 2.$$

Donc la famille $(f_{ij})_{1 \leq i, j \leq 2}$ est libre et ayant $2^2 = \dim(\mathcal{L}(E))$ éléments. Ceci prouve que $(f_{ij})_{1 \leq i, j \leq 2}$ est une base de $\mathcal{L}(E)$.

3. (a) Il est clair que la matrice de u dans la base \mathcal{U} est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ 1 & \delta \end{pmatrix}$.

(b) On calcul matriciellement et on trouve

$$\Theta_{u,-u}(f_{11}) = f_{21} - \gamma f_{12}, \quad \Theta_{u,-u}(f_{12}) = -f_{11} - \delta f_{12} + f_{22}$$

$$\Theta_{u,-u}(f_{21}) = \gamma f_{11} + \delta f_{21} - \gamma f_{22} \quad \text{et} \quad \Theta_{u,-u}(f_{22}) = \gamma f_{12} - f_{21}.$$

On en déduit que la matrice de $\Theta_{u,-u}$ dans la base $\mathcal{F} = (f_{11}, f_{12}, f_{21}, f_{22})$ canoniquement associée à \mathcal{U} est donnée par :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{F}}(\Theta_{u,-u}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \gamma & 0 \\ -\gamma & -\delta & 0 & \gamma \\ 1 & 0 & \delta & -1 \\ 0 & 1 & -\gamma & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) On a $\text{Tr}(\Theta_{u,-u}) = \text{Tr}(\mathcal{M}_{\mathcal{F}}(\Theta_{u,-u})) = 0$.

4. D'après 1. (b) $\dim \ker(\Theta_{u,-u}) = 2$, donc 0 est une valeur propre de $\Theta_{u,-u}$ de multiplicité supérieure ou égale à 2. Alors le polynôme caractéristique de $\Theta_{u,-u}$ est donné par :

$$P_{\Theta_{u,-u}}(X) = X^2(X^2 + \alpha X + \beta),$$

avec $\alpha = -\text{Tr}(\Theta_{u,-u}) = 0$ et $\beta \in \mathbb{K}$. D'où $P_{\Theta_{u,-u}}(X) = X^2(X^2 + \beta)$.

Remarque. En utilisant la matrice obtenue dans 3. (b), un calcul direct de $\det(\Theta_{u,-u} - X \text{id}_{\mathcal{L}(E)})$ donne le même résultat.

5. Si $\beta = 0$ alors $P_{\Theta_{u,-u}}(X) = X^4$ et donc 0 est une valeur propre de multiplicité 4. Or la dimension de l'espace propre associée à 0 est égale à 2. Donc $\Theta_{u,-u}$ n'est pas diagonalisable.

6. Supposons que $\beta \neq 0$.

- Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ alors $\Theta_{u,-u}$ admet 0 comme valeur propre double dont le sous-espace propre associé est de dimension 2, et deux valeurs propres simples qui sont les racines carrées de $-\beta$. Donc $\Theta_{u,-u}$ est diagonalisable.
- Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ alors on distingue les deux cas suivants :
 - Si $\beta < 0$ alors $\Theta_{u,-u}$ est diagonalisable (même raisonnement que dans le cas complexe).
 - Si $\beta > 0$ alors le polynôme $P_{\Theta_{u,-u}}$ n'est pas scindé sur \mathbb{R} et $\Theta_{u,-u}$ n'est pas diagonalisable.

7. (a) Si $\Theta_{u,-u}$ est diagonalisable alors les racines de son polynôme caractéristique sont 0 et les racines carrées (distinctes) de $-\beta$. Ainsi $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(\Theta_{u,-u}) = \{0, \lambda, -\lambda\}$ avec $\lambda = \sqrt{-\beta} \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.

- (b) i. Comme $\Theta_{u,-u}(w_1) = \lambda w_1$ alors $w_1 \circ u = u \circ w_1 - \lambda w_1$. Pour $t \in \mathbb{K}$, on a :

$$w_1 \circ u - t w_1 = u \circ w_1 - \lambda w_1 - t w_1 \iff w_1 \circ (u - t \text{id}_E) = (u - (\lambda + t) \text{id}_E) \circ w_1.$$

- ii. • Si $\det(w_1) \neq 0$ alors de l'identité dans 7. (b) i. on obtient

$$P_u(t) = P_u(t + \lambda), \quad \forall t \in \mathbb{K}.$$

Ceci est absurde car

$$\begin{vmatrix} -t & \gamma \\ 1 & \delta - t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -(t + \lambda) & \gamma \\ 1 & \delta - (t + \lambda) \end{vmatrix} \iff t = \frac{\delta - \lambda}{2}.$$

Par conséquent $\det(w_1) = 0$. Comme par hypothèse $w_1 \neq 0$, on conclut que $\text{rg}(w_1) = 1$.

- En utilisant le fait que $\text{Tr}(u \circ w_1) = \text{Tr}(w_1 \circ u)$, on obtient $\text{Tr}(w_1) = 0$.
- Comme $\text{rg}(w_1) = 1$, alors par le théorème du rang on a $\dim \ker(w_1) = 1$. Soit $\varepsilon'_1 \in \ker(w_1) \setminus \{0\}$ et $\varepsilon'_2 \in E$ tel que $(\varepsilon'_1, \varepsilon'_2)$ est une base de E . Alors

$$M = \mathcal{M}_{(\varepsilon'_1, \varepsilon'_2)}(w_1) = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}.$$

Comme $\text{Tr}(w_1) = 0 = b$, alors $M = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. La relation $M^2 = 0$ entraîne $w_1^2 = 0$.

- (c) i. • Si $w_1(\varepsilon_1) = 0$, de la relation $u \circ w_1 - w_1 \circ u = \lambda w_1$ on aura $w_1(u(\varepsilon_1)) = 0$ et ainsi $w_1 = 0$. Ceci est absurde car w_1 est un vecteur propre de $\Theta_{u,-u}$. Donc $w_1(\varepsilon_1) \neq 0$.
- Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ tel que $\alpha \varepsilon_1 + \beta w_1(\varepsilon_1) = 0$. Comme $w_1^2 = 0$, alors on a :

$$w_1(\alpha \varepsilon_1 + \beta w_1(\varepsilon_1)) = \alpha w_1(\varepsilon_1) + \beta w_1^2(\varepsilon_1) = \alpha w_1(\varepsilon_1) = 0 \Rightarrow \alpha = 0$$

et donc $\beta = 0$. Ainsi la famille $(\varepsilon_1, w_1(\varepsilon_1))$ est une base de E .

- ii. Soient $a, b \in \mathbb{K}$ tels que $u(\varepsilon_1) = a \varepsilon_1 + b w_1(\varepsilon_1)$. Alors

$$u(w_1(\varepsilon_1)) = w_1(u(\varepsilon_1)) + \lambda w_1(\varepsilon_1) = a w_1(\varepsilon_1) + b w_1^2(\varepsilon_1) + \lambda w_1(\varepsilon_1) = (a + \lambda) w_1(\varepsilon_1).$$

Il en découle que la matrice de u dans la base $(\varepsilon_1, w_1(\varepsilon_1))$ est triangulaire inférieure:

$$\mathcal{M}_{(\varepsilon_1, w_1(\varepsilon_1))}(u) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a + \lambda \end{pmatrix}.$$

- iii. $\text{Tr}(u) = 2a + \lambda \implies a = \frac{\text{Tr}(u) - \lambda}{2}$. D'où

$$\text{Sp}_{\mathbb{K}}(u) = \left\{ \frac{\text{Tr}(u) - \lambda}{2}, \frac{\text{Tr}(u) + \lambda}{2} \right\}.$$

Comme $\lambda \neq 0$, u est à spectre simple, donc diagonalisable.

- (d) i. • Si $w_2 \circ w_1(\varepsilon_1) = 0$ alors, en utilisant $\text{Tr}(w_2) = 0$, on aura

$$\mathcal{M}_{(\varepsilon_1, w_1(\varepsilon_1))}(w_2) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = b \mathcal{M}_{(\varepsilon_1, w_1(\varepsilon_1))}(w_1).$$

D'où $w_2 = bw_1$ et (w_1, w_2) est une famille liée. Ceci est absurde car w_1 et w_2 sont deux vecteurs propres de $\Theta_{u,-u}$ associés à des valeurs propres distinctes. Donc

$$w_2 \circ w_1(\varepsilon_1) \neq 0.$$

- Avec le même raisonnement on obtient $w_1 \circ w_2(\varepsilon_1) \neq 0$.

- ii. On sait que $\dim \ker(w_1) = 1$ et $\dim \ker(w_2) = 1$. D'où pour montrer que $E = \ker(w_1) \oplus \ker(w_2)$, il suffit de montrer que $\ker(w_1) \cap \ker(w_2) = \{0\}$. Comme $\ker(w_1) = \text{Vect}\{w_1(\varepsilon_1)\}$ et $\ker(w_2) = \text{Vect}\{w_2(\varepsilon_1)\}$, il suffit de montrer que $(w_1(\varepsilon_1), w_2(\varepsilon_1))$ est libre. Soient $a, b \in \mathbb{K}$ tels que $aw_1(\varepsilon_1) + bw_2(\varepsilon_1) = 0$. En appliquant successivement w_1 et w_2 et en utilisant le fait que $w_1 \circ w_2(\varepsilon_1) \neq 0$ et $w_2 \circ w_1(\varepsilon_1) \neq 0$, on aura $a = b = 0$.

- iii. Des hypothèses $u \circ w_1 = w_1 \circ u + \lambda w_1$ et $u \circ w_2 = w_2 \circ u - \lambda w_2$, on déduit après composition avec w_1 (resp. w_2):

$$w_1 \circ u \circ w_1 = 0 \quad \text{et} \quad w_2 \circ u \circ w_2 = 0.$$

D'où $u(w_1(\varepsilon_1)) \in \ker(w_1)$ et $u(w_2(\varepsilon_1)) \in \ker(w_2)$. Il existe alors $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ tels que $u(w_1(\varepsilon_1)) = \alpha w_1(\varepsilon_1)$ et $u(w_2(\varepsilon_1)) = \beta w_2(\varepsilon_1)$. Il s'en suit que $(w_1(\varepsilon_1), w_2(\varepsilon_1))$ est une base de E formée par des vecteurs propres de u .

PARTIE II

A- Etude de $\Phi_{A,B}$ dans une structure euclidienne

1. • La bilinéarité de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est une conséquence immédiate de la bilinéarité du produit matriciel, des linéarités de la trace et de la transposition.
- Pour $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$\langle N, M \rangle = \frac{1}{n} \text{Tr}(N^t M) = \frac{1}{n} \text{Tr} \left[{}^t(N^t M) \right] = \frac{1}{n} \text{Tr}(M^t N) = \langle M, N \rangle,$$

donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est symétrique.

- Soit $M = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors $M^t M = \left(\sum_{k=1}^n m_{ik} m_{jk} \right)_{1 \leq i, j \leq n}$. D'où

$$\langle M, M \rangle = \frac{1}{n} \text{Tr}(M^t M) = \frac{1}{n} \sum_{i,k=1}^n m_{ik}^2 \geq 0.$$

En plus,

$$\langle M, M \rangle = 0 \iff \forall (i, k) \in \{1, \dots, n\}^2, \quad m_{ik} = 0 \iff M = 0.$$

Ainsi $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Supposons que A est symétrique. Pour $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$\begin{aligned}\langle \Phi_A(M), N \rangle &= \langle AM + MA, N \rangle = \frac{1}{n} \text{Tr}[(AM + MA)^t N] \\ &= \frac{1}{n} \text{Tr}(AM^t N) + \frac{1}{n} \text{Tr}(MA^t N) \\ &= \frac{1}{n} \text{Tr}[M(^t N A + A^t N)] \\ &= \frac{1}{n} \text{Tr}[M^t (AN + NA)] \\ &= \langle M, AN + NA \rangle \\ &= \langle M, \Phi_A^*(N) \rangle.\end{aligned}$$

D'où

$$\Phi_A^*(N) = AN + NA = \Phi_A(N), \quad \forall N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Φ_A est donc un endomorphisme autoadjoint de l'espace euclidien $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

3. • “ \implies ” Soient λ une valeur propre de C et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ tel que $CX = \lambda X$. On a :

$$0 < {}^t X C X = {}^t X \lambda X = \lambda {}^t X X = \lambda |X|^2.$$

On en déduit que $\lambda > 0$.

• “ \impliedby ” Supposons que $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(C) = (\lambda_i)_{1 \leq i \leq n} \subset \mathbb{R}_+^*$ et considérons une base orthonormée (V_1, \dots, V_n) de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée par des vecteurs propres de C . Alors pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, il existe une famille de réels non tous nuls $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$ telle que $X = \sum_{i=1}^n \alpha_i V_i$.

On a :

$$(CX|X) = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \lambda_i > 0.$$

D'où C est définie positive.

4. S étant symétrique définie positive, alors il existe une matrice orthogonale P et une matrice diagonale $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, où $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}_+^*$, tels que $S = PD^t P$.

La matrice

$$Q = P \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})^t P$$

est symétrique définie positive et vérifie $Q^2 = S$.

5. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, alors on a :

$$\begin{aligned}\langle \Phi_S(M), M \rangle &= \langle SM + MS, M \rangle \\ &= \frac{1}{n} \text{Tr}(SM^t M) + \frac{1}{n} \text{Tr}(MS^t M) \\ &= \frac{1}{n} \text{Tr}({}^t M Q^2 M) + \frac{1}{n} \text{Tr}(M Q^2 {}^t M) \\ &= \|{}^t M Q\|^2 + \|M Q\|^2 > 0.\end{aligned}$$

On en déduit que l'endomorphisme autoadjoint Φ_S est défini positif.

6. (a) Raisonnons par récurrence sur $k \geq 0$.

- Pour $k = 0$ c'est évident.

- De $\Phi_S M = \alpha M$ on déduit que $SM = M(\alpha I_n - S)$, d'où la propriété est vraie pour $k = 1$.

- Supposons que c'est vraie pour tout $\ell \in \{0, 1, \dots, k\}$ et montrons-la pour $k + 1$.

$$\begin{aligned} S^{k+1}M &= S(S^k M) = SM(\alpha I_n - S)^k && \text{hypothèse de récurrence d'ordre } k \\ &= M(\alpha I_n - S)(\alpha I_n - S)^k && \text{hypothèse de récurrence d'ordre } 1 \\ &= M(\alpha I_n - S)^{k+1}. \end{aligned}$$

Donc la propriété est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$.

(b) Soit $R(X) = \sum_{k=0}^m a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$. On a:

$$\begin{aligned} R(S)M &= \sum_{k=0}^m a_k S^k M = \sum_{k=0}^m a_k M(\alpha I_n - S)^k \\ &= M \sum_{k=0}^m a_k (\alpha I_n - S)^k = MR(\alpha I_n - S). \end{aligned}$$

(c) i. • En prenant $R = P_S$ (le polynôme caractéristique de S) dans 6. (b) et en utilisant $P_S(S) = 0$ on obtient

$$MP_S(\alpha I_n - S) = 0. \quad (1)$$

• Si $P_S(\alpha I_n - S)$ était inversible, en multipliant (1) à droite par $(P_S(\alpha I_n - S))^{-1}$ on obtient $M = 0$ ceci contredit le fait que M est un vecteur propre.

ii. S est une matrice symétrique réelle, d'où son polynôme caractéristique est scindé sur \mathbb{R} , i.e.,

$$P_S(X) = (-1)^n (X - \mu_1)^{n_1} \cdots (X - \mu_m)^{n_m}.$$

Par suite

$$P_S(\alpha I_n - S) = (-1)^n [(\alpha - \mu_1)I_n - S]^{n_1} \cdots [(\alpha - \mu_m)I_n - S]^{n_m}.$$

Si pour tout $k \in \{1, \dots, m\}$, $(\alpha - \mu_k)I_n - S$ est inversible alors $P_S(\alpha I_n - S)$ l'est également, ce qui n'est pas vraie d'après (c) i. Il existe alors $\beta \in \text{Sp}_{\mathbb{R}}(S)$ tel que $(\alpha - \beta)I_n - S$ n'est pas inversible.

(d) Par (c) ii. on a $\sigma := \alpha - \beta \in \text{Sp}_{\mathbb{R}}(S)$, d'où $\alpha = \sigma + \beta \in \text{Sp}_{\mathbb{R}}(S) + \text{Sp}_{\mathbb{R}}(S)$. Ceci prouve que $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(\Phi_S) \subset \mathbb{R}_+^*$. On conclut par 3.

7. Par 5. Φ_S est défini positif donc injectif. On a ${}^t(\Phi_S(M)) = \Phi_S({}^tM)$. D'où

$${}^t(\Phi_S(M)) = \Phi_S(M) \iff \Phi_S({}^tM) = \Phi_S(M) \iff M = {}^tM.$$

8. (a) • “ \Rightarrow ” Supposons que C est définie positive, alors C est diagonalisable sur \mathbb{R} et $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(C) = \{\lambda_1, \lambda_2\}$ avec λ_1 et λ_2 deux réels strictement positifs. Alors $\text{Tr}(C) = \lambda_1 + \lambda_2 = a + c > 0$ et $\det(C) = \lambda_1 \lambda_2 = ac - b^2 > 0$. $ac > b^2$ et $a + c > 0$ donnent a et c de même signes positifs. Par conséquent $a > 0$ et $ac - b^2 > 0$.
- “ \Leftarrow ” Supposons que $a > 0$ et $ac - b^2 > 0$ alors $c > 0$ et donc $\lambda_1 + \lambda_2 > 0$ et $\lambda_1 \lambda_2 > 0$. Ainsi $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(C) \subset \mathbb{R}_+^*$ et C est définie positive d'après 3.

- (b) i. Soit $\lambda > 0$, alors on a :

$$\Phi_C(M_\lambda) = CM_\lambda + M_\lambda C = \begin{pmatrix} 2a\lambda & (1+\lambda)b \\ (1+\lambda)b & 2c \end{pmatrix}.$$

- ii. Pour $b \neq 0$, on considère le trinôme en λ suivant :

$$R(\lambda) = \det(\Phi_C(M_\lambda)) = -b^2\lambda^2 + (4ac - 2b^2)\lambda - b^2.$$

Comme $\Delta' = 4ac(ac - b^2) > 0$ alors R possède deux racines réelles λ_1 et λ_2 qui vérifient

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{2ac + 2(ac - b^2)}{b^2} > 0 \quad \text{et} \quad \lambda_1 \lambda_2 = 1 > 0.$$

Donc $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ et $R(\lambda)$ change de signe sur \mathbb{R}_+^* . On en déduit que pour $b > 0$, il existe $\lambda > 0$ tel que $\Phi_C(M_\lambda)$ n'est pas définie positive.

B - Orthogonalité dans $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$

1. Par hypothèse on a :

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On montre aisément par récurrence que :

$$\text{Pour } p \in \{0, \dots, n-1\}, A^p = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & & & & & \vdots \\ 1 & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = (c_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n},$$

c'est-à-dire tous les coefficients sont nuls sauf $c_{p+j,j} = 1$ pour $1 \leq j \leq n-p$.

Pour $p \geq n$, on a $A^p = 0$.

- (b) • On montre aisément par récurrence que, pour tout $0 \leq p \leq n-1$, on a :

$$B^p = A^p + {}^t A^{n-p} = (d_{l,m})_{1 \leq l, m \leq n}$$

avec $d_{p+j,j} = 1$ si $1 \leq j \leq n-p$, $d_{i,n-p+i} = 1$ si $1 \leq i \leq p$ et 0 pour les autres coefficients. En particulier $B^{n-1} = A^{n-1} + {}^t A = {}^t B$.

- On déduit que $B^n = B^t B = I_n$. (Cette dernière égalité s'obtient par un calcul direct).

Remarquons que, pour $p \geq n$, on a $B^p = B^r$ où r est le reste de la division euclidienne de p par n .

2. Par le calcul ci-dessus, on a $B^t B = {}^t B B = I_n$. Donc B est une matrice orthogonale et il vient de suite que, pour tout entier naturel p , B^p est orthogonale.

3. (a) • Il découle de 1. (a) que $\mathcal{E}_A = \text{Vect}\{I_n, A, \dots, A^{n-1}\}$ et que pour tout $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$a_0 I_n + a_1 A + \dots + a_{n-1} A^{n-1} = \begin{pmatrix} a_0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ a_1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ a_2 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n-1} & \dots & a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix}.$$

Donc (I_n, A, \dots, A^{n-1}) est une famille libre et génératrice de \mathcal{E}_A . On en déduit que (I_n, A, \dots, A^{n-1}) est une base de \mathcal{E}_A et que $\dim(\mathcal{E}_A) = n$.

- Il résulte de 1. (b) que $\mathcal{E}_B = \text{Vect}(I_n, B, \dots, B^{n-1})$ et que pour tout $(x_0, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$,

$$x_0 I_n + x_1 B + \dots + x_{n-1} B^{n-1} = \begin{pmatrix} x_0 & x_{n-1} & x_{n-2} & \dots & x_2 & x_1 \\ x_1 & x_0 & x_{n-1} & \dots & x_3 & x_2 \\ x_2 & x_1 & x_0 & \dots & x_4 & x_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{n-1} & x_{n-2} & x_{n-3} & \dots & x_1 & x_0 \end{pmatrix}.$$

Donc (I_n, B, \dots, B^{n-1}) est une famille libre et génératrice de \mathcal{E}_B . Ainsi (I_n, B, \dots, B^{n-1}) est une base de \mathcal{E}_B et $\dim(\mathcal{E}_B) = n$.

- (b) Clairement

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i A^i = \sum_{j=0}^{n-1} x_j B^j \iff \begin{cases} a_0 = x_0 \\ \forall j \in \{1, \dots, n-1\}; a_j = x_j = 0. \end{cases}$$

D'où $\mathcal{E}_A \cap \mathcal{E}_B = \text{Vect}\{I_n\}$.

4. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, A^p est une matrice triangulaire inférieure et ne contient que des zéros sur son diagonale. Par conséquent :

- $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\det(A^p) = 0$ donc A^p n'est pas inversible.

- $\forall p \in \mathbb{N}^*$, A^p admet 0 pour unique valeur propre de multiplicité n donc A^p est diagonalisable si et seulement si $p \geq n$.
En effet, pour $p \geq n$, $A^p = 0$ donc diagonalisable. Pour $p \in \{0, \dots, n-1\}$, si A^p était diagonalisable, elle serait d'après ce qui précède semblable à $\text{diag}(0, \dots, 0) = 0$, c'est-à-dire égale à 0, ce qui est faux.

5. • On sait, d'après 1., que pour $p \in \{0, \dots, n-1\}$,

$$A^p = \sum_{j=1}^{n-p} E_{p+j,j} = \sum_{i=p+1}^n E_{i,i-p}.$$

Donc, pour $p, q \in \{0, \dots, n-1\}^2$, en utilisant l'identité $E_{i,j}E_{l,m} = \delta_{jl}E_{i,m}$, on obtient :

$$A^{p \ t}(A^q) = \left(\sum_{i=p+1}^n E_{i,i-p} \right) \left(\sum_{j=q+1}^n E_{j-q,j} \right) = \sum_{i=p+1}^n \sum_{j=q+1}^n \delta_{i-p,j-q} E_{i,j}.$$

- Supposons que $p \neq q$, alors pour $i = j$ on a $\delta_{i-p,j-q} = 0$. Donc

$$A^{p \ t}(A^q) \in \text{Vect}\{E_{i,j}, 1 \leq i, j \leq n \text{ et } i \neq j\} \subset \ker(\text{Tr}).$$

D'où pour $p \neq q$ on a :

$$\langle A^p, A^q \rangle = \frac{1}{n} \text{Tr}(A^{p \ t}(A^q)) = 0.$$

- Supposons que $p = q$, alors $A^{p \ t}(A^q) = \sum_{i=p+1}^n E_{i,i}$, donc

$$\langle A^p, A^q \rangle = \frac{1}{n} \text{Tr} \left(\sum_{i=p+1}^n E_{i,i} \right) = \frac{n-p}{n}.$$

On en déduit que pour $p, q \in \{0, \dots, n-1\}$,

$$\langle A^p, A^q \rangle = \frac{n-p}{n} \delta_{pq}$$

6. D'après 3. et 5., il est clair que $\left(\sqrt{\frac{n}{n-p}} A^p \right)_{0 \leq p \leq n-1}$ est une base orthonormée de \mathcal{E}_A .

7. D'après 2., pour tout $p \in \mathbb{N}$, B^p est une matrice orthogonale. D'où

$$\forall (p, q) \in \{1, \dots, n-1\}^2, \quad B^{p \ t}(B^q) = B^{p-q}.$$

Or il résulte de 1. et 5. que

$$\begin{cases} B^k \in \text{Vect}\{E_{i,j}, 1 \leq i \neq j \leq n\} & \text{pour } k \in \mathbb{Z} \setminus n\mathbb{Z} \\ B^k = I_n & \text{pour } k \in n\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Il vient

$$\langle B^p, B^q \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } p \neq q \\ 1 & \text{si } p = q. \end{cases}$$

Ainsi $(B^p)_{0 \leq p \leq n-1}$ est une base orthonormée de \mathcal{E}_B .

8. Soient $p, q \in \{0, \dots, n-1\}$. En utilisant 1., on obtient :

$$\langle A^p, B^q \rangle = \langle A^p, A^q + \frac{1}{n} \text{Tr}(A^p A^{n-q}) \rangle = \langle A^p, A^q \rangle + \frac{1}{n} \text{Tr}(A^p A^{n-q}).$$

Or $n + p - q \geq 1$ donc $\text{Tr}(A^{n+p-q}) = 0$. On en déduit $\langle A^p, B^q \rangle = \langle A^p, A^q \rangle$.

9. • Pour tout $q \in \{0, \dots, n-1\}$, d'après 8., on a :

$$\langle A^q, B^p - A^p \rangle = \langle A^q, B^p \rangle - \langle A^q, A^p \rangle = 0.$$

Donc par linéarité $B^p - A^p \in \left(\text{Vect}\{I_n, A, \dots, A^{n-1}\} \right)^\perp = \mathcal{E}_A^\perp$.

• Soit $C \in \mathcal{E}_A$. Remarquons que pour tout $q \in \{0, \dots, n-1\}$, on a :

$$\langle A^q, B^p - C \rangle = \langle A^q, B^p \rangle - \langle A^q, C \rangle = \langle A^q, A^p \rangle - \langle A^q, C \rangle.$$

$\left(\sqrt{\frac{n}{n-q}} A^q \right)_{0 \leq q \leq n-1}$ étant une base orthonormée de \mathcal{E}_A , d'où

$$C = \sum_{q=0}^{n-1} \frac{n}{n-q} \langle A^q, C \rangle A^q.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} B^p - C \in \mathcal{E}_A^\perp &\iff \langle A^q, B^p - C \rangle = 0, \quad \forall q \in \{0, \dots, n-1\} \\ &\iff \langle A^q, C \rangle = \langle A^q, A^p \rangle, \quad \forall q \in \{0, \dots, n-1\} \end{aligned}$$

D'où

$$C = \sum_{q=0}^{n-1} \frac{n}{n-q} \langle A^q, C \rangle A^q = \sum_{q=0}^{n-1} \frac{n}{n-q} \langle A^q, A^p \rangle A^q = A^p.$$

On en déduit que A^p est l'unique élément C de \mathcal{E}_A tel que $B^p - C \in \mathcal{E}_A^\perp$.