REPUBLIQUE TUNISIENNE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Concours Nationaux d'Entrée aux Cycles de Formation d'Ingénieurs
Session 2011

الجمهورية التونسية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
المناظرات الوطنية للدخول إلى مراحل تكوين المهندسين
دورة 2011

Concours Mathématiques et Physique
Epreuve de Mathématiques I

Date : 13 Juin 2011	**Heure :** 8 H	**Durée :** 4 heures	**Nb pages :** 5
Barème : Partie I : 5 pts	**Partie II :** 6 pts	**Partie III :** 3 pts	**Partie IV :** 6 pts

La qualité de la rédaction, le soin de la présentation et la rigueur des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies. Il est rappelé que tout résultat énoncé dans le texte peut être utilisé pour traiter la suite, même s'il n'a pu être démontré. L'usage de tout ouvrage de référence et de tout autre matériel électronique est strictement interdit.

L'objectif de ce problème est l'étude des séries de la forme $\sum a_n F_n(x)$ où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres complexes et, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$,

$$F_n(x) = \frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

Partie I

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$,

$$F_{n+1}(x) = \frac{n+1}{x} F_n(x+1).$$

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$, la fonction $t \mapsto t^{x-1}(1-t)^n$ est intégrable sur $]0,1]$.

3. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$,

$$I_n(x) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^n \, dt.$$

(a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$,

$$I_{n+1}(x) = \frac{n+1}{x} I_n(x+1).$$

(b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$,

$$F_n(x) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^n \, dt.$$

4. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que la fonction $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ si et seulement si $x > 0$.

   Dans la suite, on pose, pour $x > 0$,

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt.$$

5. Soit $x > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\begin{aligned} \varphi_n \;:\;]0,+\infty[&\to \mathbb{R}, \\ t &\mapsto \begin{cases} t^{x-1}\left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n & \text{si } t \in]0,n]. \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

   (a) Montrer que la suite de fonctions $(\varphi_n)_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers la fonction φ définie par

$$\begin{aligned} \varphi \;:\;]0,+\infty[&\to \mathbb{R}, \\ t &\mapsto t^{x-1}e^{-t}. \end{aligned}$$

   (b) En appliquant le théorème de la convergence dominée à $(\varphi_n)_n$, montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^n t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n dt = \Gamma(x).$$

6. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x > 0$,

$$\int_0^n t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n dt = n^x F_n(x).$$

   (b) En déduire que, pour tout $x > 0$, $F_n(x) \sim \dfrac{\Gamma(x)}{n^x}$.

Partie II

Soit $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes. On note

$$\mathcal{D}_a = \left\{x > 0 : \sum a_n F_n(x) \text{ converge absolument}\right\}.$$

1. Montrer que, pour tout $x > 0$, $\sum a_n F_n(x)$ converge absolument si et seulement si $\sum \dfrac{a_n}{n^x}$ converge absolument.

2. Montrer que si $\sigma \in \mathcal{D}_a$ alors $[\sigma,+\infty[\subset \mathcal{D}_a$. En déduire que si $\mathcal{D}_a$ n'est pas vide alors $\mathcal{D}_a$ est un intervalle non majoré de $\mathbb{R}$.

3. Déterminer $\mathcal{D}_a$ dans les cas suivants :

   (a) Pour tout n : $a_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$ avec α réel fixé.

   (b) Pour tout n : $a_n = n!$.

Dans la suite de cette partie, on note R_a le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$.

4. On suppose que $R_a > 1$.

   (a) Justifier l'existence d'un réel $r > 1$ tel que $\sum a_n r^n$ converge absolument.

   (b) Montrer que, pour tout $x > 0$,
   $$a_n F_n(x) = o(a_n r^n).$$

   (c) En déduire que $\sum a_n F_n(x)$ converge absolument.

   (d) Montrer que, dans ce cas, $\mathcal{D}_a =]0, +\infty[$.

5. On suppose que $R_a < 1$.

   (a) Justifier l'existence d'un réel $r \in]0,1[$ tel que $(a_n r^n)_n$ ne converge pas vers 0.

   (b) Montrer que, pour tout $x > 0$,
   $$a_n r^n = o(a_n F_n(x)).$$

   (c) En déduire que $\sum a_n F_n(x)$ diverge.

   (d) Montrer que, dans ce cas, $\mathcal{D}_a$ est vide.

6. Donner un exemple de suites $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $R_a = 1$ et $\mathcal{D}_a =]\alpha, +\infty[$, avec $\alpha \geq 0$.

Partie III

Soit $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes telle que $\mathcal{D}_a$ soit non vide.
On pose $\sigma_a = \inf \mathcal{D}_a$.

1. Montrer que la série de fonctions $\sum a_n F_n$ converge normalement sur tout segment contenu dans $\mathcal{D}_a$.

2. En déduire que la somme $F = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n F_n$ est continue sur $\mathcal{D}_a$.

3. Montrer que, pour tout $x \in \mathcal{D}_a$,
   $$\left|F_n'(x)\right| \leq F_n(x)\left(\frac{1}{x} + \ln\left(1 + \frac{n}{x}\right)\right).$$

4. Soit $[\alpha, \beta]$ un segment contenu dans $]\sigma_a, +\infty[$.

   (a) Montrer que, pour tout $x \in [\alpha, \beta]$,
   $$\left|F_n'(x)\right| \leq F_n(\alpha)\left(\frac{1}{\alpha} + \ln\left(1 + \frac{n}{\alpha}\right)\right).$$

   (b) En déduire que $\sum a_n F_n'$ converge normalement sur tout segment contenu dans $]\sigma_a, +\infty[$.

5. Montrer alors que la fonction $F = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n F_n$ est de classe C^1 sur $]\sigma_a, +\infty[$.

Partie IV

Soit $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes telle que $\mathcal{D}_a$ soit non vide.

1. Soit $x \in \mathcal{D}_a$.

   (a) Montrer que, pour tout $t \in [0,1[$, la série $\sum a_n t^n$ converge absolument. On pose

$$S: \begin{array}{ccc} [0,1[& \to & \mathbb{R}, \\ t & \mapsto & \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \end{array}$$

   (b) Montrer que $F(x) = \displaystyle\int_0^1 (1-t)^{x-1} S(t)\, dt$.

2. **Exemples**

   (a) Soit N un entier naturel. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n < N \\ 1 & \text{si } n \geq N. \end{cases}$$

   Vérifier que $\mathcal{D}_a =]1, +\infty[$ puis montrer que, pour tout $x > 1$,

$$\sum_{n=N}^{+\infty} F_n(x) = F_N(x-1).$$

   (b) Soit z un nombre complexe. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \dfrac{z^n}{n!}$.
   Vérifier que $\mathcal{D}_a =]0, +\infty[$ puis montrer que, pour tout $x > 0$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{x(x+1)\cdots(x+n)} = e^z \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-z)^n}{n!\,(x+n)}.$$

3. Retrouver le fait que F est de classe C^1 sur $]\sigma_a, +\infty[$ et montrer que, pour tout $x \in]\sigma_a, +\infty[$,

$$F'(x) = \int_0^1 (1-t)^{x-1} S(t) \ln(1-t)\, dt.$$

4. Dans la suite, on pose $c_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $c_n = -\sum\limits_{p=0}^{n-1} \dfrac{a_p}{n-p}$.

   Montrer que, pour tout $t \in [0,1[$, la série $\sum c_n t^n$ converge absolument et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n t^n = S(t) \ln(1-t).$$

5. Soit $x \in \mathcal{D}_a$. On se propose de montrer que la série $\sum \frac{c_n}{n^x}$ converge absolument. Soit $N \geq 3$ un entier naturel.

(a) Montrer que
$$\sum_{n=1}^{N} \frac{|c_n|}{n^x} \leq \sum_{p=0}^{N-1} |a_p| \left(\sum_{k=1}^{N-p} \frac{1}{k\,(k+p)^x} \right).$$

(b) Soit $p \in \{0, 1, ..., N-1\}$. Montrer que
$$\sum_{k=1}^{N-p} \frac{1}{k\,(k+p)^x} \leq \frac{1}{(p+1)^x} + \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t\,(t+p)^x}.$$

(c) En remarquant que
$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t\,(t+p)^x} = \int_1^{p+1} \frac{dt}{t\,(t+p)^x} + \int_{p+1}^{+\infty} \frac{dt}{t\,(t+p)^x},$$

déduire que
$$\sum_{k=1}^{N-p} \frac{1}{k\,(k+p)^x} \leq \frac{\ln(p+1)}{(p+1)^x} + \left(1 + \frac{1}{x}\right) \frac{1}{(p+1)^x}.$$

(d) En déduire que $\sum \frac{c_n}{n^x}$ converge absolument.

6. Montrer que, pour tout $x \in]\sigma_a, +\infty[$,
$$F'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n F_n(x).$$