Concours Nationaux d'Entrée aux Cycles de Formation d'Ingénieurs
Session 2011

Concours Mathématiques et Physique
Correction de l'Epreuve de Mathématiques I

Partie -I-

1. Remarquons que: $\forall x > 0, F_n(x) > 0$ et

$$\frac{F_{n+1}(x)}{F_n(x)} = \frac{(n+1)!}{x(x+1)\cdots(x+n)(x+n+1)} \frac{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)(x+n+1)}{n!} = \frac{(n+1)}{x}.$$

2. $\forall n \in \mathbb{N} et \forall x > 0$, $t \mapsto t^{x-1}(1-t)^n$ est continue sur $]0,1]$ et au voisinage de 0, $t^{x-1}(1-t)^n \sim \frac{1}{t^{1-x}}$ et $t \mapsto \frac{1}{t^{1-x}}$ est intégrable au voisinage de 0 ssi $1 - x < 1$ ssi $x > 0$ d'où le résultat.

3. (a) $\forall n \in \mathbb{N}$ $\forall x > 0$, et $\forall a > 0$ apres intégration par partie

$$\int_a^1 t^{x-1}(1-t)^{n+1}dt = [\frac{1}{x}t^x(1-t)^{n+1})]_1^a + \frac{n+1}{x}\int_a^1 t^x(1-t)^n dt$$

et on faisont $a \longrightarrow 0$ on aurra le resultat.

(b) Soit $x > 0$ et montrons par réccurence que $I_n(x) = F_n(x) \forall n \in \mathbb{N}$ pour $n = 0, I_0(x) = \int_0^1 t^{x-1}dt = \frac{1}{x} = F_0(x)$, supposons que le résultat est vrai jusqu'a l'ordre n et montrons qu'elle reste a l'ordre $n+1$ $I_{n+1}(x) = \frac{n+1}{x}I_n(x+1) = \frac{n+1}{x}F_n(x+1) = F_{n+1}(x)$ d'ou le résultat.

4. L'application $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue sur $]0,+\infty[$, au voisinage de 0, $t^{x-1}e^{-t} \sim \frac{1}{t^{1-x}}$ et $t \mapsto \frac{1}{t^{1-x}}$ qui est intégrable au voisinage de 0 ssi $1 - x < 1$ ssi $x > 0$, au voisinage de $+\infty$, $\lim_{t \to +\infty} t^2 t^{x-1}e^{-t} = 0$ d'ou l'intégrabalité $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ sur $]0,+\infty[$ et l'existance de $\Gamma(x)$ $\forall x > 0$.

5. (a) Pour $t > 0$, $\exists n_0$ tq $\forall n \geq n_0$, $t < n \Rightarrow \forall n \geq n_0$

$$\varphi_n(t) = t^{x-1}(1 - \frac{t}{n})^n = t^{x-1}\exp[n\log(1 - \frac{t}{n})]$$

et $n\log(1 - \frac{t}{n}) \sim -t$ comme exp est continue donc $(\varphi_n)^{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers φ sur $]0,+\infty[$.

(b)

$$\int_0^n t^{x-1}(1 - \frac{t}{n})^n dt = \int_0^{+\infty} \varphi_n(t)dt$$

$\forall t \in]0,n[$, on pose $g_n(t) = n\log(1 - \frac{t}{n}) + t$ on a: $g_n'(t) = \frac{-\frac{t}{n}}{1-\frac{t}{n}} < 0$ et $\lim_{t \to 0} g_n(t) = 0$ ce qui donne $g_n(t) < 0$ sur $]0,n[$ donc $n\log(1 - \frac{t}{n}) \leq -t$ $\forall t \in]0,n[$, et $|\varphi_n(t)| = \varphi_n(t) \leq t^{x-1}e^{-t} = \varphi(t)$ $\forall t > 0$ or φ est intégrable sur $]0,+\infty[$, donc d'aprés theorem de convergence dominée

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^n t^{x-1}(1 - \frac{t}{n})^n dt = \lim_{n \to +\infty} \int_0^{+} \varphi_n(t) = \int_0^{+\infty} \lim_{n \to +\infty} \varphi_n(t)dt = \Gamma(x).$$

(c) $n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall x > 0$

$$\int_0^n t^{x-1}(1-\frac{t}{n})^n dt = \underline{u = \frac{t}{n}} \int_0^1 (nu)^{x-1}(1-u)^n n du = n^x \int_0^1 u^x(1-u)^n du = n^x I_n(x) = n^x F_n(x)$$

or $\lim_{n\to+\infty} \int_0^n t^{x-1}(1-\frac{t}{n})^n dt = \Gamma(x)$ donc $F_n(x) \sim \frac{\Gamma(x)}{n^x}$

Partie -II-

1. Ona: $|a_nF_n(x)| \sim \frac{|a_n|\Gamma(x)}{n^x} \Rightarrow \sum_{n\geq 0} a_nF_n(x)$ converge absolument ssi $\sum_{n\geq 1} a_n \frac{\Gamma(x)}{n^x}$converge absolument ssi $\sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{n^x}$ converge absolument.

2. Soit $x \geq \sigma$, alors $\frac{|a_n|}{n^\sigma} \geq \frac{|a_n|}{n^x} \Rightarrow \sum_{n\geq 1} \frac{|a_n|}{n^x}$ converge absolument donc $x \in D_a$ par suite $[\sigma, +\infty[\subset D_a$.
   Si $D_a \neq \emptyset$, soient $x, y \in D_a$ tq $x \leq y$ tq $\forall t \in [x, y]$ on a:$\frac{|a_n|}{n^y} \leq \frac{|a_n|}{n^t} \leq \frac{|a_n|}{n^x} \Rightarrow \sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{n^t}$ converge absolument donc $t \in D_a$ et par suite $[x, y] \subset D_a$.
   Si $\sigma \in D_a$ d'aprés ce qui précède $[\sigma, +\infty[\subset D_a$ et donc D_a n'est pas majorée.

3. (a) $\Sigma_{n\geq 1} \frac{1}{n^{x+\alpha}}$ converge absolument ssi $x + \alpha > 1 \Rightarrow$

$$D_a =]1-\alpha, +\infty[\cap]0, +\infty[=] \sup(1-\alpha, 0), +\infty[.$$

   (b) Posons $u_n = \frac{n!}{n^x}$ pour $x > 0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^x}\frac{n^x}{n!} = (n+1)(\frac{1}{1+\frac{1}{n}})^x \to +\infty$, d'aprés Alembert $\sum_n u_n = \sum_n |u_n|$ diverge $\Rightarrow D_a = \emptyset$.

4. (a) Comme $R_a > 1 \Rightarrow \forall r \in]1, R_a[$, $\sum_n a_nr^n$ converge absolument d'ou l'existance de $r > 1$ tq $\sum_n a_nr^n$ converge absolument .
   (b) on a : $a_nF_n(x) \sim \frac{a_n}{n^x}$ et $\frac{\frac{a_n}{n^x}}{a_nr^n} = \frac{1}{n^xr^n} \to \frac{1}{+\infty} = 0 \Rightarrow \frac{a_n}{n^x} = o(a_nr^n)$ par la suite $a_nF_n(x) = o(a_nr^n)$.
   Or $\sum_n a_nr^n$ converge absolument et donc $\sum_n a_nF_n(x)$ converge absolument.
   (c) On sait que $D_a \subset]0, +\infty[$ et $\forall x > 0$, $\sum_n a_nF_n(x)$ converge absolument $\Rightarrow D_a =]0, +\infty[$.

5. (a) Comme $R_a < 1 \Rightarrow \exists r \in]R_a, 1[$ et d'aprés critere sur les séries entiére (a_nr^n) ne converge pas vers 0.
   (b) on a : $\frac{a_nr^n}{a_nF_n(x)} \sim \frac{a_nr^n}{a_n\frac{\Gamma(x)}{n^x}} = \frac{n^xr^n}{\Gamma(x)} = \frac{\exp[x\log n + n\log r}{\Gamma(x)} = \frac{\exp[n(x\frac{\log n}{n} + \log r)}{\Gamma(x)}$ or $\log r < 0$
   $\Rightarrow \frac{a_nr^n}{a_nF_n(x)} \to 0 \Rightarrow a_nr^n = o(a_nF_n(x)$.

   converge absolument et donc Si $\sum_n a_nF_n(x)$ converge $\Rightarrow \sum_n a_nr^n$ converge ce qui absurde car $(a_nr^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0.
   (c) D'aprés ce qui précede pour tout $x > 0$, $\sum_n a_nF_n(x)$ diverge $\Rightarrow D_a = \emptyset$.

6. Pour $\alpha \geq 0$, il suffit de prendre $a_n = \frac{1}{n^{\alpha+1}}$ on a le rayon de convergence de $\sum_n a_nz^n$ est $R_a = 1$ (d'aprés Alembert) et d'aprés Partie -II-3-a) $D_a =]\alpha, +\infty[$.

Partie -III-

1. Soit $[a, b] \subset D_a$, $\forall x \in [a, b]$, $|F_n(x)| = F_n(x) \leq F_n(a) \Rightarrow \sup_{x\in[a,b]} |a_nF_n(x)| = |a_n|F_n(a)$ et $a \in D_a \Rightarrow \sum_n \sup_{x\in[a,b]} |a_nF_n(x)|$ converge $\Rightarrow \sum_n a_nF_n$ converge normalement sur $[a, b]$.

2. $\forall n \in \mathbb{N}$, $x \mapsto a_nF_n(x)$ est continue sur $]0,+\infty[\subset D_a$ fraction rationnelle et $\sum_n a_nF_n$ converge normalement sur tout segment de $D_a \Rightarrow x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_nF_n(x)$ est continue sur D_a.

3. $\forall x > 0$, $\log F_n(x) = \log n! - \sum_{k=0}^{n}\log(x+k)$ et $x \mapsto -\sum_{k=0}^{n}\log(x+k)$ est dérivable sur $]0,+\infty[$. D'autre part $\forall x>0$, $\frac{F_n'(x)}{F_n(x)} = -\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{x+k} \Rightarrow$
$$|\frac{F_n'(x)}{F_n(x)}| \leq |F_n(x)(-\frac{1}{x}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x+k})| \leq F_n(x)(\frac{1}{x}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x+k}).$$
Montrons que $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x+k} \leq \log(1+\frac{n}{x})$ $\forall x>0$
Soit $x>0$, $\forall k\geq 1$ et $\forall t \in [k-1,k]$ on a: $\frac{1}{x+k} \leq \frac{1}{x+t} \leq \frac{1}{x+k-1} \Rightarrow$
$\int_{k-1}^{k}\frac{1}{x+k}dt \leq \int_{k-1}^{k}\frac{1}{x+t}dt \leq \int_{k-1}^{k}\frac{1}{x+k-1}dt \Rightarrow \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x+k} \leq \sum_{k=1}^{n}\log(x+k)-\log(x+k-1) \leq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x+k-1} \Rightarrow \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x+k} \leq \log(1+\frac{n}{x})$ d'où le resultat.

4. Soit $[\alpha,\beta] \subset]\sigma_a,+\infty[$, on a: $\forall x \in [\alpha,\beta], |F_n(x)| = F_n(x) \leq F_n(\alpha)$ et $\frac{1}{x}+\log(1+\frac{n}{x}) \leq \frac{1}{\alpha}+\log(1+\frac{n}{\alpha})$ d'où $\forall x\in[\alpha,\beta]$, $|F_n'(x)| \leq F_n(\alpha)(\frac{1}{\alpha}+\log(1+\frac{n}{\alpha}))$, $\frac{|a_nF_n(\alpha)|(\frac{1}{\alpha}+\log(1+\frac{n}{\alpha}))}{|a_nF_n(\alpha)|\log n} \to 1 \Rightarrow$
$|a_nF_n(\alpha)|(\frac{1}{\alpha}+\log(1+\frac{n}{\alpha})) \sim \frac{|a_nF_n(\alpha)|}{(\log n)^{-1}}$, soit $\sigma_a < \alpha' < \alpha$, on a: $\frac{n^{\alpha}F_n(\alpha)}{(\log n)^{-1}} \sim \frac{n^{\alpha'}\Gamma(\alpha)}{n^{\alpha}(\log n)^{-1}} \to 0$
$\Rightarrow \frac{|a_n|F_n(\alpha)}{(\log n)^{-1}} = o(\frac{|a_n|}{n^{\alpha'}})$ et $\sum_{n\geq 1}\frac{a_n}{n^{\alpha'}}$ converge absolument car $\sum_{n\geq 1}a_nF_n(\alpha')$ converge absolument $\Rightarrow \sum_n |a_nF_n(\alpha)|(\frac{1}{\alpha}+\log(1+\frac{n}{\alpha}))$ converge $\Rightarrow \sum_n a_nF_n'$ converge normalement sur $[\alpha,\beta]$ et donc converge normalement sur tout segment de $]\sigma_a,+\infty[$.

5. On a: $x\mapsto a_nF_n(x)$ est de classe C^1 sur $]\sigma_a,+\infty[$ (fraction rationnelle), $\sum_n a_nF_n'$ converge normalement sur tout segment de $]\sigma_a,+\infty[$ et $\sum_n a_nF_n$ converge simplement sur $]\sigma_a,+\infty[$ donc $F=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nF_n$ est de classe C^1 sur $]\sigma_a,+\infty[$.

Partie -IV-

1. (a) On a: $\forall t \in]0,1[$, $\frac{t^n}{\frac{1}{n^x}} = \exp[n(\frac{x\log(n)}{n}+\log t)] \to 0$, $\Rightarrow t^n = o(\frac{1}{n^x}) \Rightarrow a_nt^n = o(\frac{a_n}{n^x})$ or $x\in D_a$, $\sum_n \frac{a_n}{n^x}$ converge absolument $\Rightarrow \sum_n a_nt^n$ converge absolument.

   (b) $\forall n\in\mathbb{N}$, on a: $f_n : t\mapsto (1-t)^{x-1}a_nt^n$ est continue sur $[0,1[$, au voisinage de 1 $|f_n(t)| \sim \frac{|a_n|}{(1-t)^{1-x}}$ qui est intégrable au voisinage de 1 ssi $x>0$ et
$$\int_0^1 |f_n(t)|dt = |a_n|\int_0^1(1-t)^{x-1}t^ndt = |a_n|F_n(x)$$
or $\sum_n a_nF_n(x)$ converge absolument $\Rightarrow \sum_n \int_0^1|f_n(t)|dt$ converge , d'aprés théoreme intégration terme à terme
$$\int_0^1(1-t)^{x-1}S(t)dt = \int_0^1(1-t)^{x-1}(\sum_{n=0}^{+\infty}a_nt^n)dt = \sum_{n=0}^{+\infty}a_n\int_0^1(1-t)^{x-1}t^ndt = \sum_{n=0}^{+\infty}a_nF_n(x) =$$

2. (a) On a: $\sum_n\frac{a_n}{n^x} = \sum_{n\geq N}\frac{1}{n^x}$ converge absolument ssi $x>1$ d'où $D_a =]1,+\infty[$ et pour tout $x\in D_a =]1,+\infty[$ on a:
$$\sum_{n=N}^{+\infty}F_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}a_nF_n(x) = \int_0^1(1-t)^{x-1}S(t)dt = \int_0^1(1-t)^{x-1}(\sum_{n=N}^{+\infty}t^n)dt =$$
$\int_0^1(1-t)^{x-1}(\frac{t^N}{1-t})dt = \int_0^1(1-t)^{x-2}t^Ndt$ un changement de variable $u=1-t$ et on utilisant Partie I-3-b) on aurra $\sum_{n=N}^{+\infty}F_n(x) = \int_0^1(1-u)^Nu^{x-2}du = F_N(x-1)$.

(b) Soit $z \in \mathbb{C}^*$ et $a_n = \frac{z^n}{n!}$. $\frac{|\frac{a_{n+1}}{(n+1)^x}|}{|\frac{a_n}{n^x}|} = \frac{|z|}{n+1}(1+\frac{1}{n})^{-x} \to 0 \Rightarrow \sum_n \frac{a_n}{n^x}$ converge absolument $\Rightarrow D_a =]0, +\infty[$.

$$F(x) = \int_0^1 (1-t)^{x-1}(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n t^n}{n!})dt = \int_0^1 (u)^{x-1}\exp(z(1-u))du = \exp z \int_0^1 (u)^{x-1}\exp(-zu)($$

$\exp z \int_0^1 (u)^{x-1} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-z)^n u^n}{n!})du$ comme la serie de fonction $\sum_n (-z)^n \frac{u^{n+x-1}}{n!}$ converge normalement sur $[0,1]$, on peut intégrer terme à terme :

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{x(x+1)\cdots(x+n)} = \exp z \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-z)^n}{n!} \int_0^1 u^{n+x-1}du = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-z)^n}{n!(x+n)}$$

3. Soit $g : (x,t) \to (1-t)^{x-1}S(t)$ est continue sur $]\sigma_a, +\infty[\times]0,1[$ et admet une dérivée partielle par rapport à x et $\frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = (1-t)^{x-1}S(t)\log(1-t)$. Soit $[\alpha,\beta] \subset]\sigma_a, +\infty[, \forall x \in [\alpha,\beta]$ on a: $|(1-t)^{x-1}S(t)| \leq |(1-t)^{\beta-1}S(t)|$, $|(1-t)^{x-1}S(t)\log(1-t)| \leq |(1-t)^{\beta-1}S(t)\log(1-t)|$ qui sont continues sur $[0,1[$ et au voisinage de $1 \leq |(1-t)^{\beta-1}S(t)\log(1-t) = o((1-t)^{\alpha-1}S(t))$, d'aprés Partie -IV-1-b) les fonctions $t \to (1-t)^{\alpha-1}S(t)$ et $t \to (1-t)^{\beta-1}S(t)$ sont intégrables sur $[0,1[$ d'ou le resultat.

4. On a d'aprés Partie -IV-1-a)$\sum_n a_n t^n$ converge absolument sur $[0,1[$ et d'aprés Alembert $\sum_{n\geq 1} -\frac{t^n}{n}$ converge absolument sur $[0,1[$ donc leur produit de Gauchy $\sum_n b_n t^n$ converge absolument avec $b_0 = 0$ et $\forall n \geq 1$ $b_n = -\sum_{p=0}^{n-1} \frac{a_p}{n-p}$ et on a:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} b_n t^n = (\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n)(-\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n}) = S(t)\log(1-t).$$

5. (a) $\sum_{n=1}^N \frac{|b_n|}{n^x} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^x}|\sum_{p=0}^{n-1} \frac{a_p}{n-p}| \leq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^x}\sum_{p=0}^{n-1} \frac{|a_p|}{n-p}$ un changement d'indice $k = n-p$ on aurra:
$\sum_{n=1}^N \frac{|b_n|}{n^x} \leq \sum_{p=0}^{N-1} |a_p|(\sum_{k=1}^{N-p} \frac{1}{k(k+p)^x})$.

(b) Soit $p \in \{0,1,\cdots N-1\}$, $\forall k \geq 2$ et $t \in [k-1,k]$ on a :$\frac{1}{k} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k-1}$, $(k+p-1)^x \leq (t+p)^x \leq (k+p)^x \Rightarrow \int_{k-1}^k \frac{1}{k(k+p)^x}dt \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{t(t+p)^x}dt \Rightarrow$ $\frac{1}{k(k+p)^x} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{t(t+p)^x}dt \Rightarrow \sum_{k=2}^{N-p} \frac{1}{k(k+p)^x} \leq \int_1^{N-p} \frac{1}{t(t+p)^x}dt$, or $\frac{1}{t(t+p)^x} \sim \frac{1}{t^{x+1}}$ et $\forall x > 0$, $t \to \frac{1}{t^{x+1}}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ donc $t \to \frac{1}{t(t+p)^x}$ est intégrable au voisinage $+\infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{N-p} \frac{1}{k(k+p)^x} = \frac{1}{(p+1)^x} + \sum_{k=2}^{N-p} \frac{1}{k(k+p)^x} \leq \frac{1}{(p+1)^x)} + \int_1^{+\infty} \frac{1}{t(t+p)^x}dt$

(c) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t(t+p)^x}dt = \int_1^{p+1} \frac{1}{t(t+p)^x}dt + \int_{p+1}^{+\infty} \frac{1}{t(t+p)^x}dt$, $\int_1^{p+1} \frac{1}{t(t+p)^x}dt \leq \frac{1}{(p+1)^x}\int_1^{p+1} \frac{1}{t}dt = \frac{\log(p+1)}{(p+1)^x}$ et $\int_{p+1}^{+\infty} \frac{1}{t(t+p)^x}dt \leq \int_{p+1}^{+\infty} \frac{1}{t^{x+1}}dt = \frac{1}{x}\frac{1}{(p+1)^x}$. D'ou

$$\sum_{k=1}^{N-p} \frac{1}{k(k+p)^x} = \frac{1}{(p+1)^x} + \sum_{k=2}^{N-p} \frac{1}{k(k+p)^x} \leq \frac{1}{(p+1)^x} + \frac{\log(p+1)}{(p+1)^x} + \frac{1}{x}\frac{1}{(p+1)^x} =$$

$(1+\frac{1}{x})\frac{1}{(p+1)^x} + \frac{\log(p+1)}{(p+1)^x}$

(d) On a:$\frac{|a_p|}{(p+1)^x} \sim \frac{|a_p|}{p^x} \Rightarrow \sum_p \frac{a_p}{(p+1)^x}$ converge absolument .
D'autre part soit $\sigma_a < x' < x$, $a_p\frac{\log(p+1)}{(p+1)^x} = o(\frac{a_p}{p^{x'}}) \Rightarrow \sum_p a_p\frac{\log(p+1)}{(p+1)^x}$ converge absolument par la suite $\sum_{n\geq 1} \frac{b_n}{n^x}$ converge absolument

6. On a:$\sum_{n\geq 1}\frac{b_n}{n^x}$ converge absolument donc $\sum_{n\geq 0} b_n F_n(x)$ converge absolument $\forall x \in D_a$, d'aprés Partie -IV-1-b)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} b_n F_n(x) = \int_0^1 (1-t)^{x-1}(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n t^n)dt = \int_0^1 (1-t)^{x-1} S(t)\log(1-t)dt$$

et d'aprés Partie -IV-3 on aurra $F'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n F_n(x)$