RÉPUBLIQUE TUNISIENNE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Concours Nationaux d'Entrée aux Cycles de Formation d'Ingénieurs
Session 2010

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

المناظرات الوطنية للدخول
إلى مراحل تكوين المهندسين
دورة 2010

Concours Mathématiques et Physique
Correction de l'Epreuve de Mathématiques I

Partie -I-

1. Notons R_a (resp R_b) le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ (resp $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$).

   On a: $\dfrac{a_n}{b_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{C}$ donc $b_n = O(a_n)$ donc $R_b \geq R_a = +\infty$ par suite $\boxed{R_b = +\infty.}$

2. (a) $\forall x > 0$, $T(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n \geq b_1 x$ (car $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n > 0$) donc $\boxed{T(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty}$

   (b) i. Soit $\varepsilon > 0$, on a: $\dfrac{a_n}{b_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ donc

   $$\exists n_0 \text{ tel que } \forall n \geq n_0 : \left|\frac{a_n}{b_n} - \ell\right| \leq \varepsilon.$$

   Or $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n > 0$ donc $\boxed{\forall n \geq n_0, |\, a_n - \ell b_n \,| \leq \varepsilon b_n.}$

   ii. $\forall x \geq 0$,

   $$\begin{aligned}
|S(x) - \ell T(x)| &= \left|\sum_{n=0}^{n_0}(a_n - \ell b_n)x^n + \sum_{n=n_0+1}^{+\infty}(a_n - \ell b_n)x^n\right| \\
&\leq \sum_{n=0}^{n_0}|a_n - \ell b_n|\, x^n + \sum_{n=n_0+1}^{+\infty}|a_n - \ell b_n|\, x^n \\
&\leq \sum_{n=0}^{n_0}|a_n - \ell b_n|\, x^n + \varepsilon \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} b_n x^n \\
&\leq \sum_{n=0}^{n_0}|a_n - \ell b_n|\, x^n + \varepsilon T(x), \ (\text{car } \forall n \in \mathbb{N}, b_n > 0).
\end{aligned}$$

   donc

   $$\boxed{\forall x \geq 0, \left|\frac{S(x)}{T(x)} - \ell\right| \leq \frac{\sum_{n=0}^{n_0}|a_n - \ell b_n|\, x^n}{T(x)} + \varepsilon}$$

   (c) $\forall x \geq 0$, on a : $T(x) \geq b_{n_0+1}x^{n_0+1}$ (car $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n > 0$) donc

   $$\frac{\sum_{n=0}^{n_0}|a_n - \ell b_n|\, x^n}{T(x)} \leq \frac{\sum_{n=0}^{n_0}|a_n - \ell b_n|\, x^n}{b_{n_0+1}x^{n_0+1}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

i. donc

$$\exists A > 0 \text{ tel que } \forall x \geq A : \frac{\sum_{n=0}^{n_0} |a_n - \ell b_n| x^n}{T(x)} \leq \varepsilon$$

d'où

$$\forall x \geq A : \left|\frac{S(x)}{T(x)} - \ell\right| \leq 2\varepsilon$$

parsuite $\boxed{\frac{S(x)}{T(x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell}$

3. Soit $a > 0$.

(a) On a

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{\ln a}{n}\right)^{n^2} &= \exp[n^2\ln(1+\frac{\ln a}{n})] \\ &= \exp[n^2(\frac{\ln a}{n} - \frac{(\ln a)^2}{2n^2} + \circ(\frac{1}{n^2})] \\ &= \exp[n\ln a].\exp[-\frac{1}{2}(\ln a)^2].\exp[\circ(1)]\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\left(1+\frac{\ln a}{n}\right)^{n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} a^n \exp\left(-\tfrac{1}{2}(\ln a)^2\right).}$$

(b) On applique ce qui précède aux suites suivantes $a_n = \frac{1}{n!}\left(1+\frac{\ln a}{n}\right)^{n^2}$ et $b_n = \frac{a^n}{n!} > 0$ on a : $\frac{a_n}{b_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \exp\left(-\frac{1}{2}(\ln a)^2\right)$ et le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ est $+\infty$ et de somme $\exp(az)$ donc

$$\frac{S(x)}{T(x)} = \frac{S(x)}{\exp(ax)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \exp\left(-\frac{1}{2}(\ln a)^2\right)$$

par suite

$$\boxed{S(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \exp\left(-\tfrac{1}{2}(\ln a)^2\right)\exp(ax)}$$

Partie -II-

1. Le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 0} \frac{(-2)^n}{n!} z^n$ est $+\infty$ (d'aprés la règle de D'Alembert) et de somme $\exp(-2z)$ d'où

$$\exp(-t)\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-2)^n}{n!} t^n = \exp(-3t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

donc $\boxed{((-2)^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est B-convergente et } \underset{n\to+\infty}{\text{Blim}}\,((-2)^n) = 0}$

2. Le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 0} \frac{4^n}{n!} z^n$ est $+\infty$ (d'aprés la règle de D'Alembert) et de somme $\exp(4z)$ d'où

$$\exp(-t)\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n}{n!} t^n = \exp(3t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

donc $\boxed{((4)^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ n'est pas B-convergente}}$

3. (a) D'aprés la règle de D'Alembert $\boxed{\text{le rayon de convergence de } \sum_{n\geq 0} \frac{a^n}{n!} z^n \text{ est } +\infty \text{ et de somme } \exp(}$

(b) On a :

$$\exp(-t)\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!} t^n = \exp[(a-1)t] = \exp[(Re\,(a)-1)t].\exp[(iIm\,(a))t]$$

<u>$1^{\text{èr}}$ cas</u> : $a = 1$, $\exp[(a-1)t] = 1 \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

<u>$2^{\text{ème}}$ cas</u> : $a \neq 1$,

$$\left|\exp(-t)\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!} t^n\right| = \exp[(Re\,(a)-1)t].$$

Si $Rea < 1$ alors $|\exp[(a-1)t]| \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\exp(-t)\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!} t^n \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Si $Rea > 1$ $|\exp[(a-1)t]| \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc $\exp(-t)\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!} t^n$ n'a pas de limite quand $t \to +\infty$.

Si $Rea = 1$, et $a \neq 1$ alors

$$\exp[(a-1)t] = \exp[(iIma)t] = \sin[(Ima)t] + i\cos[(Ima)t]$$

et $\sin[(Ima)t]$ n'admet pas de limite en $+\infty$ (il suffit d'utiliser le critère séquentiel avec la suite $x_n = \frac{\Pi}{2|Ima|} + \frac{n\Pi}{|Ima|}$.)

Conclusion : <u>la suite $(u_n)_n$ est B-convergente si et seulement si $a = 1$ ou $Re\,(a) < 1$</u> et dans ce cas, <u>$\underset{n\to+\infty}{\text{Blim}}\ (a^n) = 0$, si $Re\,(a) < 1$ et $\underset{n\to+\infty}{\text{Blim}}\ (a^n) = 1$, si $a = 1$.</u>

4. On a d'aprés la partie précédente : $\frac{u_n}{n!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{a^n}{n!}\exp\left(-\frac{1}{2}(\ln a)^2\right)$ donc le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geq 0} \frac{u_n}{n!} z^n$ est $+\infty$ et

$$\exp(-t)\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} t^n \underset{t\to+\infty}{\sim} \exp\left(-\frac{1}{2}(\ln a)^2\right)\exp[(a-1)t]$$

ce qui donne :

$$\exp(-t)\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} t^n \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{2}(\ln a)^2\right) & \text{si} \quad a = 1 \\ 0 & \text{si} \quad 0 < a < 1 \\ +\infty & \text{si} \quad 1 < a \end{cases}$$

Donc <u>la suite (u_n) est B-convergente ssi $0 < a \leq 1$</u>et <u>$\underset{n\to+\infty}{\text{Blim}}\ u_n = 1$, si $a = 1$ et $\underset{n\to+\infty}{\text{Blim}}\ u_n = 0$, si $0 < a$</u>

5. Soit $(u_n)_n$.

(a) On suppose que $(u_n)_n$ converge vers l au sens usuel. On considère les deux suites $a_n = \frac{u_n}{n!}$ et $b_n = \frac{1}{n!}$. Alors $b_n > 0$, $\frac{a_n}{b_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$ et le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ est $+\infty$ et de somme $\exp(z)$ donc, d'après partie I, le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ est $+\infty$ et on a

$$\frac{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n}{\exp(t)} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} l$$

par suite $(u_n)_n$ est B-convergente et sa B-limite est l.

(b) On a : d'apres ce qui précede la suite $((-2)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est B-convergente mais n'est pas convergente.

6. (a) Notons par R_1 (resp R_2) rayon deconvergence de serie $\sum_{n\geq 0} \frac{u_n}{n!} z^n$ (resp $\sum_{n\geq 0} \frac{v_n}{n!} z^n$) alors si on note par R le rayon de convergence de la serie $\sum_{n\geq 0} \frac{u_n+v_n}{n!} z^n$ on a $R \geq \min(R_1, R_2) = +\infty$, d'autre part

$$\exp(-t)\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n+v_n}{n!} t^n = \exp(-t)\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} t^n + \exp(-t)\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{v_n}{n!} t^n \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} \underset{n\to+\infty}{\text{Blim}}\, u_n + \underset{n\to+\infty}{\text{Blim}}\, v_n$$

donc $\boxed{(u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est B-convergente et on a : } \underset{n\to+\infty}{\text{Blim}}\,(u_n+v_n) = \underset{n\to+\infty}{\text{Blim}}\, u_n + \underset{n\to+\infty}{\text{Blim}}\, v_n.}$

Si on note par R_λ rayon de convergence de serie entiére $\sum_{n\geq 0} \frac{\lambda u_n}{n!} z^n$ alors $R_\lambda \geq R_1 = +\infty$. D'autre part

$$\exp(-t)\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda u_n}{n!} t^n = \lambda \exp(-t)\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} t^n \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda \underset{n\to+\infty}{\text{Blim}}\, u_n$$

donc $\boxed{(\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est B-convergente et on a : } \underset{n\to+\infty}{\text{Blim}}\,(\lambda u_n) = \lambda . \underset{n\to+\infty}{\text{Blim}}\, u_n.}$

(b) Si on prend $u_n = v_n = (-2)^n$ les deux suites sont B-convergente mais la suite $u_n v_n = 4^n$ n'est pas B-convergente.

Partie -III-

1. 1^{er} cas : $a = 1$. alors : $S_n = \sum_{k=0}^{n} a^k = n+1$, dans ce cas

$$\sum_{n\geq 0} \frac{S_n}{n!} z^n = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{(n-1)!} z^n + \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$$

donc la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{S_n}{n!} z^n$ est une somme de deux séries entières de rayon de convergence $+\infty$ donc son rayon de convergence $+\infty$ et

$$\exp(-t)\sum_{n\geq 0} \frac{S_n}{n!} t^n = \exp(-t)\left[(t+1)\exp t\right] \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

$2^{ème}$ cas : $a \neq 1$. Alors $S_n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$ donc

$$\sum_{n\geq 0} \frac{S_n}{n!} z^n = \frac{1}{1-a} \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!} - a \sum_{n\geq 0} \frac{a^n z^n}{n!}$$

parsuite $\sum_{n\geq 0} \frac{S_n}{n!} z^n$ admet $+\infty$ comme rayon de convergence et

$$\exp(-t) \sum_{n\geq 0}^{+\infty} \frac{S_n}{n!} t^n = \frac{1}{1-a} - a \exp((a-1)t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1-a} \text{ si } Re(a) < 1$$

et n'admet pas de limite dans $\mathbb{C}$ si $Re(a) \geq 1$.

Conclusion : $\boxed{\sum_{n\geq 0} a^n \text{est B-convergente ssi } Re(a) < 1 \text{ et dans ce cas Blim} \sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a}}$

2. (a) Si $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge au sens usuel alors la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge au sens usuel donc d'aprés 5)a) Partie -II- (S_n) est B-convergente donc $\sum_{n\geq 0} u_n$est B-convergente et dans ce cas
$$B\text{-}\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \underset{n\to+\infty}{\text{Blim}}\ S_n = \lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$
   (b) On sait que $\sum_{n\geq 0}(-2)^n$est B-convergente d'aprés question précédente et $\sum_{n\geq 0}(-2)^n$ n'est pas convergente au sens usuel.

3. (a) La série entière $\sum_{n\geq 1} \frac{S_{n-1}}{n!} z^n$ est la série primitive de la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{S_n}{n!} z^n$ donc son rayon de convergence $+\infty$.
   (b) Puisque le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{S_n}{n!} z^n$ est $+\infty$ on peut intégrer terme à terme sur $[0, t]$. Donc
$$\int_0^t (\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{S_n r^n}{n!}) dr = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{S_n}{n!} \int_0^t r^n dr = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{S_n}{n!} \frac{t^{n+1}}{(n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{S_{n-1}}{n!} t^n.$$
   D'autre part $\exp(-r) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{S_n}{n!} r^n \underset{r\to+\infty}{\longrightarrow} S$, donc $\exp(-r) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{S_n}{n!} r^n = S + o(1)$ donc $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{S_n}{n!} r^n = Se^r + o(e^r).}$
   En intégrant
$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{S_{n-1}}{n!} t^n &= \int_0^t (\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{S_n r^n}{n!}) dr \\
&= \int_0^t (Se^r + o(e^r))\, dr \\
&= Se^t - S + \int_0^t o(e^r) dr \\
&= Se^t + o(e^t) \text{ (car la fonction } \exp \text{ n'est pas intégrable sur } \mathbb{R}^+)
\end{aligned}$$

Donc
$$e^{-t}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{S_{n-1}}{n!}t^n \underset{r\to+\infty}{\longrightarrow} S.$$

(c) On a : $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{n-1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont B-convergentes donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}=(S_n-S_{n-1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est B-convergente et $\underset{n\to+\infty}{\text{Blim}}\, u_n = \underset{n\to+\infty}{\text{Blim}}\, S_n - \underset{n\to+\infty}{\text{Blim}}\, S_{n-1} = S-S=0.$

4. (a) Comme
$$\sum_{n\geq 0}\frac{u_n}{n!}z^n=\sum_{n\geq 0}\frac{S_n}{n!}z^n-\sum_{n\geq 1}\frac{S_{n-1}}{n!}z^n$$
alors le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0}\frac{u_n}{n!}z^n$ est $+\infty$.

(b) Le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 1}\frac{S_{n-1}}{n!}z^n$ est $+\infty$ donc G est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et
$$\forall t\in\mathbb{R},\ G'(t)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{S_{n-1}}{(n-1)!}t^{n-1}$$
donc F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (produit de fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$) et on a $\forall t\in\mathbb{R}$,
$$\begin{aligned}
F'(t) &= e^{-t}G'(t)-e^{-t}G(t)\\
&= e^{-t}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{S_{n-1}}{(n-1)!}t^{n-1}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{S_{n-1}}{n!}t^n\right)\\
&= e^{-t}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{S_n}{n!}t^n-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{S_{n-1}}{n!}t^n\right)\\
&= e^{-t}\left(S_0+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{S_n-S_{n-1}}{n!}t^n\right)\\
&= e^{-t}\left(u_0+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{u_n}{n!}t^n\right)\\
&= e^{-t}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{u_n}{n!}t^n
\end{aligned}$$

(c) On a
$$\int_0^T\left(e^{-t}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{u_n}{n!}t^n\right)dt=\int_0^T F'(t)dt=F(T)-F(0),$$
or $F(T)\underset{T\to+\infty}{\longrightarrow} S=B\text{-}\sum_{n=0}^{+\infty}u_n$ et $F(0)=e^0G(0)=0$ donc
$$\lim_{T\to+\infty}\int_0^T\left(e^{-t}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{u_n}{n!}t^n\right)dt=B\text{-}\sum_{n=0}^{+\infty}u_n$$

5. (a) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 au sens usuel donc elle est B-convergente et $\underset{n\to+\infty}{\text{Blim}}\, u_n = \lim_{n\to+\infty}u_n=0.$

(b) On a : $\left|\frac{u_n}{n!}\right| \leq \frac{1}{n!}$ donc le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{u_n}{n!} z^n$ est $+\infty$ et $\forall t \in \mathbb{R}^*$

$$\begin{aligned} e^{-t}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} t^n &= e^{-t}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!(n+1)} t^n \\ &= e^{-t}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)!} t^n \\ &= \frac{e^{-t}}{t}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} t^n \\ &= \frac{1-e^{-t}}{t} \end{aligned}$$

(c) Supposons que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est B-convergente alors d'aprés question **4)c)** de la **partie III** la limite $\lim_{T\to+\infty} \int_0^T \left(e^{-t}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} t^n \right) dt$ existe

Or

$$e^{-t}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} t^n = \frac{1-e^{-t}}{t} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t}$$

donc $t \to \frac{1-e^{-t}}{t}$ est une fonction positive qui n'est pas intégrable $\mathbb{R}^+$. Ce qui est absurde.

Conclusion : $\boxed{\text{la série } \sum_{n\geq 0} u_n \text{ n'est pas B-convergente.}}$

(d) La condition $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ B-convergente et $\underset{n\to+\infty}{\text{Blim}}\, u_n = 0$ est necessaire mais n'est pas suffisante pour que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ soit B-convergente.

Partie -IV-

1. D'après question **c)4) partie III**, si $\sum_{n\geq 0} u_n$ est B-convergente elle est est B-sommable.

2. (a) Soit $v_p = \frac{(-1)^p}{(2p+1)!}(2p+2)^n$, on a :

$$\frac{|v_{p+1}|}{|v_p|} = \frac{(2p+4)^n}{(2p+2)(2p+3)(2p+2)^n} \underset{p\to+\infty}{\sim} \frac{(2p)^n}{(2p)^{n+2}} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

D'aprés la règle de D'Alembert $\sum_{p\geq 0} v_p$ converge absolument d'ou l'existance de u_n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) $\forall t \in \mathbb{R}$, ona:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} t^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} (2p+2)^n \right) t^n \\
&= \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(t(2p+2))^n}{n!} \right) \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} \\
&= \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{e^{(2p+2)t}}{(2p+1)!} \\
&= e^t \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{e^{(2p+1)t}}{(2p+1)!} \\
&= e^t \sin(e^t)
\end{aligned}$$

(c) La fonction $t \to \sin(e^t)$ n'admet pas de limite en $+\infty$ (il suffit de prendre la suite $u_n = \ln(\frac{\pi}{2} + n\pi)$, donc la fonction $t \to e^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{(n)!} t^n$ n'admet pas de limite en $+\infty$, par la suite $\sum_{n \geq 0} u_n$ n'est pas B-convergente.

(d) On a

$$\begin{aligned}
\int_0^T \left(e^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{(n)!} t^n \right) dt &= \int_0^T e^{-t} e^t \sin(e^t) dt \text{ (IPP)} \\
&= \left[-e^{-t} \cos(e^t) \right]_0^T - \int_0^T e^{-t} \cos(e^t) dt \\
&= -e^{-T} \cos(e^T) + \cos 1 - \int_0^T e^{-t} \cos(e^t) dt
\end{aligned}$$

or $\lim_{T \to +\infty} -e^{-T} \cos(e^T) + \cos(1) = \cos(1)$ et la fonction $t \to e^{-t} \cos(e^t)$ est continue sur $[0, +\infty[$ et integrable au voisinage de $+\infty$,d'où $\lim_{T \to +\infty} \int_0^T e^{-t} \cos(e^t) dt$ existe donc $\lim_{T \to +\infty} \int_0^T \left(e^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{(n)!} t^n \right) dt$ existe par la suite $\sum_{n \geq 0} u_n$ est B-sommable mais n'est pas B-convergente.

3. (a) Si $\sum_{n \geq 0} u_n$ est absolument B-sommable alors $\sum_{n \geq 0} \frac{u_n}{n!} z^n$ admet $+\infty$ comme rayon de convergence et pour $p = 0$, l'application $t \to e^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} t^n$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ donc $\lim_{T \to +\infty} \int_0^T (e^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{(n)!} t^n) dt$ existe par la suite $\sum_{n \geq 0} u_n$ est B-sommable.

(b) Pour $u_n = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} (2p+2)^n$, on sait que $\sum_{n \geq 0} u_n$ est B-sommable et

$$e^{-t} \frac{d}{dt} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} t^n = e^{-t} \frac{d}{dt} (e^t \sin(e^t)) = e^{-t} \left[e^t \sin(e^t) \right] + e^t \cos(e^t)$$

comme $\int_0^T e^{-t}e^t \sin(e^t)dt$ admet une limite dans $\mathbb{C}$ quand $T \to +\infty$ et

$$\int_0^T e^t \cos(e^t)dt = \left[\sin(e^t)\right]_0^T = \sin(e^T) - \sin(1)$$

qui n'admet pas de limite dans $\mathbb{C}$ quand $T \to +\infty$. Donc

$$\int_0^T \left(e^{-t}\frac{d}{dt}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{u_n}{n!}t^n\right)dt = \int_0^T e^{-t}e^t \sin(e^t)dt + \int_0^T e^t \cos(e^t)dt$$

n'admet pas de limite dans $\mathbb{C}$ quand $T \to +\infty$ parsuite $t \to e^{-t}\frac{d}{dt}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{u_n}{(n)!}t^n$ n'est pas intégrable sur $[0, +\infty[$ par la suite $\sum_{n\geq 0} u_n$ n'est pas absolument B-sommable.

4. Si $\sum_{n\geq 0} u_n$ est absolument convergente alors $\sum_{n\geq 0}|u_n|$ est convergente donc $\forall p \in \mathbb{N}$, $\sum_{n\geq 0}|u_{n+p}|$ est convergente donc $\forall p \in \mathbb{N}$, $\sum_{n\geq 0}|u_{n+p}|$ est B-convergente donc $\forall p \in \mathbb{N}$, $\sum_{n\geq 0}\frac{u_{n+p}}{n!}z^n$ a pour rayon de convergence $+\infty$ et d'aprés question **c)4)partie -III-** $\forall p \in \mathbb{N}$, $\lim_{T\to+\infty}\int_0^T \left(e^{-t}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{|u_{n+p}|}{n!}t^n\right)dt$ existe dans $\mathbb{C}$. Or

$$\forall t \in \mathbb{R}^+,\ e^{-t}\left|\frac{d^p}{dt^p}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{u_n}{n!}t^n\right| = e^{-t}\left|\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{u_{n+p}}{n!}t^n\right| \leq e^{-t}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{|u_{n+p}|}{n!}t^n$$

donc l'application $\forall p \in \mathbb{N}$ l'application $t \to e^{-t}\frac{d^p}{dt^p}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{u_n}{n!}t^n$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, par suite

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n\geq 0} u_n \text{ est absolument B-sommable.}}$$