REPUBLIQUE TUNISIENNE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Concours Nationaux d'Entrée aux Cycles de Formation d'Ingénieurs
Session 2010

الجمهورية التونسية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
المناظرات الوطنية للدخول إلى مراحل تكوين المهندسين
دورة 2010

Concours Mathématiques et Physique
Epreuve de Mathématiques I

Date: Lundi 31 Mai 2010	**Heure: 8 H**	**Durée: 4 H**	**Nbre pages: 5**

Barème : Partie I: 4 pts , Partie II: 5 pts, Partie III: 7 pts , Partie IV: 4 pts

Une grande importance sera attachée à la rigueur du raisonnement, à la clarté et au soin de la présentation. L'usage des calculatrices n'est pas autorisé.
Il est rappelé que tout résultat énoncé dans le texte peut être utilisé pour traiter la suite, même s'il n'a pu être démontré.

Introduction

Le but de ce problème est l'étude de certains procédés de sommabilité introduits par **Emile Borel** dans sons polycope "*Leçons sur les séries divergentes*". Dans la première partie, on prouve des résultats préliminaires utile pour la suite du problème. La partie II (respectivement partie III) est consacrée à l'étude de la notion de **B-convergence** (convergence au sens de Borel) d'une suite (respectivement d'une série) de nombres complexes. On prouve en particulier que la B-convergence est une extension de la convergence au sens usuel. Dans la partie IV, on discute deux autres procédés de sommabilité pour les séries de nombres complexes : la **B-sommabilité** et la **B-sommabilité absolue**.

On rappelle que, pour tout nombre complexe z, la série $\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$ est absolument convergente et que

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Partie I : Résultats préliminaires

Soient $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ et $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ deux séries entières à coefficients complexes. On suppose que:

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n > 0$.
- $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ admet $+\infty$ pour rayon de convergence.
- $\frac{a_n}{b_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{C}$.

1. Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ admet $+\infty$ pour rayon de convergence.

2. On pose alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \quad \text{et} \quad T(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n.$$

   (a) Montrer que $T(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

   (b) Soit $\varepsilon > 0$.

      i. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq n_0$, on a $|a_n - \ell b_n| \leq \varepsilon b_n$.

      ii. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$,

$$\left|\frac{S(x)}{T(x)} - \ell\right| \leq \frac{\sum_{n=0}^{n_0} |a_n - \ell b_n|\, x^n}{T(x)} + \varepsilon$$

   (c) En déduire que $\dfrac{S(x)}{T(x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

3. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $a > 0$.

   (a) Montrer que $\left(1 + \dfrac{\ln a}{n}\right)^{n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} a^n \exp\left(-\frac{1}{2}(\ln a)^2\right)$.
   (Indication: Utiliser le DL de $\ln(1+x)$ au voisinage de 0).

   (b) En déduire un équivalent de $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \dfrac{\ln a}{n}\right)^{n^2} \dfrac{x^n}{n!}$ quand $x \to +\infty$.

Partie II : Suites B-convergentes

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes. On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **B-convergente** si elle vérifie les deux propriétés suivantes:

- La série entière $\sum_{n\geq 0} \dfrac{u_n}{n!} z^n$ admet $+\infty$ comme rayon de convergence.
- La fonction

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & e^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{u_n}{n!} t^n \end{array}$$

  admet une limite $\ell \in \mathbb{C}$ quand $t \to +\infty$.

Dans ce cas, cette limite ℓ s'appelle la **B-limite** de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On la note $\underset{n\to+\infty}{\mathrm{Blim}}\, u_n = \ell$.

1. Montrer que la suite $((-2)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est B-convergente et calculer sa B-limite.

2. Montrer que la suite $(4^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas B-convergente.

3. Soit $a \in \mathbb{C}$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = a^n$.

(a) Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{u_n}{n!} z^n$ vaut $+\infty$ et calculer sa somme.

(b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est B-convergente si et seulement si $a = 1$ ou $\mathrm{Re}(a) < 1$. Calculer, dans ce cas, la B-limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

4. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $a > 0$. Etudier la B-convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par: $u_n = \left(1 + \frac{\ln a}{n}\right)^{n^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

5. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes.

   (a) Montrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente (au sens usuel) alors elle est B-convergente et on a

   $$\operatorname*{Blim}_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} u_n.$$

   (**Indication :** On pourra appliquer la partie préliminaire avec $a_n = \frac{u_n}{n!}$ et $b_n = \frac{1}{n!}$)

   (b) Montrer, à l'aide d'un contre exemple, que la réciproque est fausse.

6. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites B-convergentes de nombres complexes et $\lambda \in \mathbb{C}$.

   (a) Montrer que les suites $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont B-convergentes et que

   $$\operatorname*{Blim}_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = \operatorname*{Blim}_{n\to+\infty} u_n + \operatorname*{Blim}_{n\to+\infty} v_n \text{ et } \operatorname*{Blim}_{n\to+\infty} (\lambda u_n) = \lambda \operatorname*{Blim}_{n\to+\infty} u_n.$$

   (b) Que dire de la B-convergence de la suite produit $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Partie III : Séries B-convergentes

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. On dit que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est **B-convergente** si la suite des somme partielle $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est B-convergente. Dans ce cas, la B-limite de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'appelle la **B-somme** de la série $\sum_{n\geq 0} u_n$. On note

$$\text{B-}\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \operatorname*{Blim}_{n\to+\infty} S_n.$$

1. Pour $a \in \mathbb{C}$, étudier la B-convergence de la série $\sum_{n\geq 0} a^n$ et calculer, dans le cas de B-convergence, sa B-somme.

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes.

   (a) Montrer que si la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente (au sens usuel) alors elle est B-convergente. Comparer dans ce cas sa somme (au sens usuel) et sa B-somme.

   (b) Montrer, à l'aide d'un contre exemple, que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ peut être B-convergente sans l'être au sens usuel.

3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes. On suppose que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est B-convergente et on note S sa B-somme.

(a) Montrer que la série entière $\sum_{n\geq 1} \frac{S_{n-1}}{n!} z^n$ admet $+\infty$ comme rayon de convergence.

(b) En remarquant que, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{S_{n-1}}{n!} t^n = \int_0^t \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{S_n}{n!} r^n \right) dr$$

et que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{S_n}{n!} r^n \underset{r\to+\infty}{=} Se^r + o(e^r)$$

montrer que

$$\lim_{t\to+\infty} e^{-t} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{S_{n-1}}{n!} t^n = S$$

(c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est B-convergente et que $\underset{n\to+\infty}{\text{Blim}}\, u_n = 0$.

4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes telle que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ soit B-convergente.

On pose, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$G(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{S_{n-1}}{n!} t^n \quad \text{et} \quad F(t) = e^{-t} G(t).$$

(a) Montrer que $\sum_{n\geq 0} \frac{u_n}{n!} z^n$ admet $+\infty$ comme rayon de convergence.

(b) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $F'(t) = e^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} t^n$.

(c) En déduire que la limite $\int_0^T e^{-t} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} t^n \right) dt$ existe dans $\mathbb{C}$, quand $T \to +\infty$, et que

$$\lim_{T\to+\infty} \int_0^T e^{-t} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} t^n \right) dt = \text{B-}\sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \frac{1}{n+1}$.

(a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est B-convergente et que $\underset{n\to+\infty}{\text{Blim}}\, u_n = 0$.

(b) Montre que la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{u_n}{n!} z^n$ admet $+\infty$ comme rayon de convergence et que

$$\forall t \in \mathbb{R}^* : e^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} t^n = \frac{1 - e^{-t}}{t}.$$

(c) En déduire que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ n'est pas B-convergente.

(d) Conclure.

Partie IV : Séries B-sommables et absolument B-sommables

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes.

- On dit que la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ est **B-sommable** si
  - ⋆ La série entière $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{u_n}{n!} z^n$ admet $+\infty$ pour rayon de convergence.
  - ⋆ La limite $\int_0^T e^{-t}\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} t^n\right) dt$ existe dans $\mathbb{C}$, quand $T \to +\infty$.
- On dit que la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ est **absolument B-sommable** si
  - ⋆ La série entière $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{u_n}{n!} z^n$ admet $+\infty$ pour rayon de convergence.
  - ⋆ Pour tout $p \in \mathbb{N}$, la fonction
  $$t \mapsto e^{-t} \frac{d^p}{dt^p}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} t^n\right)$$
  est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

1. Montrer que si la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ est B-convergente alors elle est B-sommable.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose
$$u_n = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} (2p+2)^n .$$
   (a) Justifier l'existence de u_n, pour $n \in \mathbb{N}$.

   (b) En admettant que la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{u_n}{n!} z^n$ admet $+\infty$ comme rayon de convergence et qu'on peut intervertir les deux symbôles " $\sum$ ", montrer que
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} t^n = e^t \sin\left(e^t\right), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$
   (c) En déduire que la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ n'est pas B-convergente.

   (d) Montrer que la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ est B-sommable et conclure.
3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes.

   (a) Montrer que si la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ est absolument B-sommable alors elle est B-sommable.

   (b) En utilisant l'exemple précédent, montrer que $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ peut être B-sommable sans être absolument B-sommable.
4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes. Montrer que si la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ est absolument convergente (au sens usuel) alors elle est absolument B-sommable.

Fin de l'épreuve