Concours Nationaux d'Entrée aux Cycles de Formation d'Ingénieurs
Session 2009

Concours Mathématiques et Physique
Correction de l'Epreuve de Mathématiques I

Partie -I-

1. (a) pour $x \in]0, 2\pi[$, $e^{ix} \neq 1$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} e^{ikx} = \frac{1-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}} = \frac{e^{i\frac{n+1}{2}x}(e^{-i\frac{n+1}{2}x} - e^{i\frac{n+1}{2}x})}{e^{i\frac{x}{2}}(e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}})} = \frac{sin(\frac{n+1}{2}x)}{sin(\frac{x}{2})} e^{\frac{inx}{2}}$.

   (b) pour tout couple d'entiers naturels (p, q) vérifiant $p+1 \leq q$ on a: $\displaystyle\sum_{n=p+1}^{q} b_n \sin(nx) = \sum_{n=p+1}^{q} b_n(S_n(x) - S_{n-1}(x)) = \sum_{n=p+1}^{q} b_n S_n(x) - \sum_{n=p+1}^{q} b_n S_{n-1}(x)$
   et $\displaystyle\sum_{n=p+1}^{q} b_n S_n(x) - \sum_{n=p}^{q-1} b_{n+1} S_n(x) = b_q S_q(x) - b_{p+1} S_p(x) + \sum_{n=p+1}^{q-1} (b_n - b_{n+1}) S_n(x)$ D'ou le résultat.

2. (a) Soit $\alpha \in]0, \pi[$. On montre que $\displaystyle\sum_{n\geq 0} b_n \sin(nx)$ vérifie le critère de cauchy uniforme sur $[\alpha, 2\pi - \alpha]$. On a:

$$\left|\sum_{n=p+1}^{q} b_n \sin(nx)\right| \leq b_q |S_q(x)| + b_{p+1} |S_p(x)| + \sum_{n=p+1}^{q-1} (b_n - b_{n+1}) |S_n(x)|$$

   Or $|S_n(x)| \leq \frac{1}{sin\frac{\alpha}{2}}$, pour $x \in [\alpha, 2\pi - \alpha]$

$$\left|\sum_{n=p+1}^{q} b_n \sin(nx)\right| \leq (b_q + b_{p+1} + \sum_{n=p+1}^{q-1} (b_n - b_{n+1}))\frac{1}{sin\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{3b_{p+1}}{sin\dfrac{\alpha}{2}}$$

   qui tend vers 0 lorsque p tend vers l'infini. Soit $\varepsilon \geq 0$, $\exists p_0$ tq $\forall p \geq p_0$ on a $\dfrac{3b_{p+1}}{sin\frac{\alpha}{2}} \leq \varepsilon$

   donc $\left|\displaystyle\sum_{n=p+1}^{q} b_n \sin(nx)\right| \leq \varepsilon$

   (b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $x \mapsto b_n sin(nx)$ est une fonction impaire $2\pi-$ périodique donc il suffit d'étudier la convergence simple sur $[0, \pi]$
   en 0 et π, la série est nulle donc converge. Soit $[a, b] \subset]0, \pi[$, on choisie $\alpha \in]0, \pi[$ tq $\alpha \leq a \leq b \leq 2\pi - \alpha$ il suffit de prendre $\alpha = \dfrac{1}{2} inf(a, 2\pi - b)$ donc $[a, b] \subset [\alpha, 2\pi - \alpha]$ la série déjà converge uniformément sur $[\alpha, 2\pi - \alpha]$ donc sur $[a, b]$, donc la série converge uniformément sur tout compact de $]0, \pi[$ donc converge simplement sur $]0, \pi[$ et par suite sur $\mathbb{R}$.

3. (a) La série de fonctions
$\sum_{n\geq 1}(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ donc la suite $(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))_n$ converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}$, en particulier pour $x=0$ on obtient $(a_n)_{n\geq 1}$ tend vers 0 et comme $(cos(nx))$ est bornée ce qui implique $(a_n cos(nx))$ tend vers 0 et donc $(b_n\sin(nx))_{n\geq 1}$ converge simplement vers 0 .

(b) i.

$$\int_0^\pi (b_n\sin nx)^2dx = b_n^2\int_0^\pi(\sin nx)^2dx = b_n^2\int_0^\pi\left(\frac{1-cos(2x)}{2}\right)dx$$
$$= \frac{b_n^2}{2}\int_0^\pi dx - \frac{b_n^2}{2}\int_0^\pi cos(2x)dx = \frac{\pi b_n^2}{2}.$$

ii. si la suite (b_n) est bornée alors la suite $(b_n\sin(nx))_{n\geq 1}$ est borné, continue et intégrable sur $[0,\pi]$ et qui converge simplement vers 0 sur $[0,\pi]$ et comme l'application constante est intégrable sur $[0,\pi]$.
D'apré théeorème de la convergence dominée

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_0^\pi(b_n\sin nx)^2dx = \int_0^\pi \lim_{n\longrightarrow+\infty}(b_n\sin nx)^2dx = 0$$

donc $\frac{\pi b_n^2}{2}$ tend vers 0 et donc la suite b_n tend vers 0.

iii. Dans le cas général, on pose $b'_n = \inf(1,|b_n|)$r on a $b'_n\leq 1$ (donc bornée) et $|b'_n|\leq|b_n|$ donc $(b'_n\sin(nx))^2\leq(b_n\sin(nx))^2$ ce qui implique que pour tout x de $\mathbb{R}$, $b'_n\sin(nx)$ tend vers 0. et si on applique ce qui précéde à b'_n au lieu de b_n on trouve que $(b'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Donc il existe un nombre finie d'entiers tq $b'_n=1$ (car si non, on peut extraire une sous suite de b'_n qui converge vers 1 (absurde) donc il existe n_0 tq $\forall n\geq n_0$ $b'_n=|b_n|$ ce qui donne que (b_n) tend vers 0.

Partie -II-

Partie A.

1. (a) si f est deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$, alors d'aprés Taylor young,

$$\forall x\in\mathbb{R}, f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2}f''(x)+o(h^2)$$

et

$$f(x-h)=f(x)-hf'(x)+\frac{h^2}{2}f''(x)+o(h^2)$$

ce qui donne

$$\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}=f''(x)+o(1)$$

qui tend vers $f''(x)$ lorsque h tend vers 0. alors $D^2f(x)$ existe et $D^2f(x)=f''(x)$.

(b) i. φ est la somme d'une application continue f et d'un polynôme donc continue.
c'est claire que $\varphi(a)=\varphi(b)=0$.
On vérfie que : $\forall x\in\mathbb{R}$ on a:

$$\frac{\varphi(x+h)+\varphi(x-h)-2\varphi(x)}{h^2}=\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}+2\varepsilon$$

donc lorsque h tend vers 0 on trouve $D^2\varphi(x)=2\varepsilon, \forall x\in\mathbb{R}$.

ii. Si φ admet un maximum en x_0 strictement positive

$$\frac{\varphi(x_0 + h) + \varphi(x_0 - h) - 2\varphi(x_0)}{h^2} \leq 0$$

alors lorsque h tend vers 0 on trouve $D^2\varphi(x_0) = 2\varepsilon \leq 0$ (absurd).

iii. De même on vérifie que ψ est continue , $\psi(a) = \psi(b) = 0$; et $\forall x \in \mathbb{R}$ on a:

$$\frac{\psi(x + h) + \psi(x - h) - 2\psi(x)}{h^2} = \frac{f(x + h) + f(x - h) - 2f(x)}{h^2} - 2\varepsilon$$

donc lorsque h tend vers 0 on trouve $D^2\psi(x) = -2\varepsilon, \forall x \in \mathbb{R}$.

iv. Vue que φ ne peut pas avoir un maximum strictement positive donc $\varphi \leq 0$ et par la suite $\forall x \in [a, b]$

$$f(x) - f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \varepsilon(x - a)(b - x)$$

on fait tendre ε vers 0 on trouve:

$$f(x) - f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq 0$$

Si on utilise ψ on trouve que cette quantité est positive et par la suite

$$f(x) - f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

Donc f est affine.

Partie B.

1. On a déjà (a_n) et (b_n) convergent vers 0, donc $\exists C \geq 0$ tq $\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall n \geq 1$,

$$\left| -\frac{a_n cos(nx) + b_n sin(nx)}{n^2} \right| \leq \frac{C}{n^2},$$

$\displaystyle\sum_{n\geq1} \frac{C}{n^2}$ converge $\Longrightarrow \displaystyle\sum_{n\geq1} -\frac{a_n cos(nx) + b_n sin(nx)}{n^2}$ converge normalement donc uniformément et simplement sur $\mathbb{R}$. et $\forall n \geq 1$, $x \mapsto -\dfrac{a_n cos(nx) + b_n sin(nx)}{n^2}$ sont continus sur $\mathbb{R}$ et 2π périodique, D'où F est continue sur $\mathbb{R}$ et 2π périodique . les applications $x \mapsto cos(px)$ et $x \mapsto sin(px)$ sont bornées donc $\displaystyle\sum_{n\geq1} -\frac{a_n cos(nx) + b_n sin(nx)}{n^2} cos(px)$ et $\displaystyle\sum_{n\geq1} -\frac{a_n cos(nx) + b_n sin(nx)}{n^2} sin(px)$ convergeant uniformément sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $[0, 2\pi]$ et les termes géneraux sont continus.

$$a_p(F) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(x)cos(px)dx = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}(-\frac{a_n}{n^2}\int_0^{2\pi} cos(nx)cos(px)dx - \frac{b_n}{n^2}\int_0^{2\pi} sin(nx)cos(px)dx)$$

$$b_p(F) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(x)sin(px)dx = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}(-\frac{a_n}{n^2}\int_0^{2\pi} cos(nx)sin(px)dx - \frac{b_n}{n^2}\int_0^{2\pi} sin(nx)sin(px)dx)$$

$$\int_0^{2\pi} cos(nx)cos(px)dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(cos((n+p)x) + cos((n-p)x))dx = \begin{cases} \pi \text{ si } n = p \\ 0 \text{ sinon.}\end{cases}$$
$$\int_0^{2\pi} sin(nx)sin(px)dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(cos((n+p)x) - cos((n-p)x))dx = \begin{cases} -\pi \text{ si } n = p \\ 0 \text{ sinon.}\end{cases}$$

et les applications $x \mapsto cos(nx)sin(px)$, $x \mapsto sin(nx)cos(px)$, sont impaire 2π périodique D'où
$$\int_0^{2\pi} cos(nx)sin(px)dx = \int_{-\pi}^{\pi} cos(nx)sin(px)dx = 0$$
et
$$\int_0^{2\pi} sin(nx)cos(px)dx = \int_{-\pi}^{\pi} sin(nx)cos(px)dx = 0$$
et par la suite
$a_p(F) = \frac{-a_p}{p^2}$ et $b_p(F) = \frac{-b_p}{p^2}$ $\forall p \geq 1$

2. (a) G est continue sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ et $G(x) \sim_0 1 \Longrightarrow G$ est continue sur $\mathbb{R}$. un développement limité de $x \mapsto sin^2(\frac{x}{2})$ à l'ordre 4 au voisinage de 0.
$sin^2(\frac{x}{2}) = (\frac{x}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3))^2 = \frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{6} + o(x^4)$,
$\frac{G(x)-G(0)}{x} = -\frac{1}{6}x + o(x)$ donc G est dérivable en 0 et $G'(0) = 0$ en dehors de 0 G est dérivable et $\forall x \in \mathbb{R}^*$ $G'(x) = \frac{2}{x^2}[-\frac{4}{x}sin^2(\frac{x}{2}) - sin(x)]$ qui est continue sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$, un développement limité de G' au voisinage de 0 nous donne,
$G'(x) = \frac{2}{x^2}[-\frac{4}{x}(\frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{6} + o(x^4)) + x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)] = x + o(x)$ donc G' est continue en 0. par la suite G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$.

(b) On a: $\left|-\frac{4}{x}sin^2(\frac{x}{2}) + sin(x)\right| \leq \frac{4}{|x|}\left|\frac{x}{2}\right| + 1 = 3$. D'ou $\left|G'(x)\right| \leq \frac{3}{x^2}, \forall x \geq 1$ et G' est continue sur $[0, +\infty[$ donc G' est intégrable sur $[0, +\infty[$.

3. (a)
$$\begin{aligned}
D(x,h) &= -\sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{a_n}{n^2h^2}[cos(n(x+h)) + cos(n(x-h)) - 2cos(nx)] \\
&+ \frac{b_n}{n^2h^2}[sin(n(x+h)) + sin(n(x-h)) - 2sin(nx)]) \\
&= -\sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{2a_n}{n^2h^2}[cos(nx)(cos(nh)-1)] + \frac{2b_n}{n^2h^2}[sin(nx)(cos(nh)-1)]) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n cos(nx) + b_n sin(nx))\frac{2(cos(nh)-1)}{n^2h^2} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n cos(nx) + b_n sin(nx))\frac{4sin^2(\frac{nh}{2})}{n^2h^2} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n cos(nx) + b_n sin(nx))G(nh)
\end{aligned}$$

(b) i. Regardons

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} S_k(x)(G(kh) - G((k-1)h)) &= \sum_{k=0}^{n} S_k(x)G(kh) - \sum_{k=0}^{n} S_k(x)G((k+1)h) \\
&= \sum_{k=0}^{n} S_k(x)G(kh) - \sum_{k=1}^{n-1} S_{k-1}(x)G(kh) \\
&= \sum_{k=1}^{n}(a_k cos(kx) + b_k sin(kx))G(kh) \\
&\quad -S_n(x)G((n+1)h)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} f(x)[G(kh) - G((k+1)h)] &= f(x)(G(0) - G((n+1)h) \\
&= f(x)(1 - G((n+1)h))
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}(S_k(x) - f(x))(G(kh) - G((k+1)h)) &= \sum_{k=1}^{n}(a_k cos(kx) + b_k sin(kx))G(kh) \\
&- \; f(x) + (S_n(x) - f(x))G((n+1)h)
\end{aligned}$$

or $\forall x \in \mathbb{R}$ et $h \neq 0$ $|G((n+1)h)| \leq \dfrac{4}{(n+1)^2h^2}$ qui tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ de même pour $|S_n(x) - f(x)|$
D'ou le résultat.

ii. D'après ce qui précéde la série converge simplement sur $\mathbb{R}_+$. Soit x fixé et soit $\epsilon \geq 0$, $\exists N_0$ tq $\forall n \geq N_0$, $|S_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$

$$\begin{aligned}
|R_{N_0}(x,h)| &= \left|-\sum_{n=N_0+1}^{+\infty}(S_n(x) - f(x))\int_{nh}^{(n+1)h} G'(t)dt\right| \\
&\leq \sum_{n=N_0+1}^{+\infty} |S_n(x) - f(x)| \int_{nh}^{(n+1)h} \left|G'(t)\right| dt \\
&\leq \epsilon \int_{(N_0+1)h}^{+\infty} \left|G'(t)\right| dt \leq \epsilon \int_0^{+\infty} \left|G'(t)\right| dt \leq c\epsilon
\end{aligned}$$

vue que N_0 ne dépend pas de h, $(R_{N_0}(x,h))_{N_0 \in \mathbb{N}}$ converge uniformément par rapport a h vers l'application nulle sur $\mathbb{R}_+$ et donc $\sum_{n\geq 0} g_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

iii. On a: $\forall n \in \mathbb{N}$ $\lim\limits_{h \to 0} g_n(h) = 0$ et $\sum\limits_{n\geq 0} g_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$. Donc $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{h \to 0}(D(x,h) - f(x)) = \lim_{h \to 0}\sum_{n=0}^{+\infty}(S_n(x) - f(x))(G(nh) - G((n+1)h)) = \sum_{n=0}^{+\infty}\lim_{h \to 0} g_n(h) =$$

$$\Longrightarrow \lim_{h \to 0} D(x,h) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h)+F(x-h)-2F(x)}{h^2} = f(x)$$ Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $D^2F(x)$ existe et $D^2F(x) = f(x)$

4. (a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\Phi(x) = \int_0^x (x-t)f(t)dt = x\int_0^x f(t)dt - \int_0^x tf(t)dt$, or $t \mapsto f(t)$ et $t \mapsto tf(t)$ sont continues. Donc Φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\Phi'(x) = xf(x) - \int_0^x f(t)dt - xf(x) = \int_0^x f(t)dt$, et par la suite Φ' est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ donc Φ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\Phi''(x) = f(x)$.

   (b) On pose $g = F - \Phi$ on a: Φ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et $\Phi'' = f$ donc Φ admet une pseudo-dérivée en tout point de $\mathbb{R}$ et $D^2\Phi = f$, et $D^2F = f \Longrightarrow D^2(g) = 0$, d'après ce qui précède g est affine donc il existe α, β tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \alpha x + \beta x + \Phi(x)$, on a: F est 2π périodique, $\Longrightarrow \Phi(x+2\pi) = \Phi(x) - 2\alpha\pi$ pour $x = -\pi$ on trouve que $\alpha = \dfrac{\Phi(-\pi) - \Phi(\pi)}{2\pi}$.

   (c) On sait que Φ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ donc F est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et on a: $F' = \alpha - \Phi'$ comme F' est 2π périodique donc Φ' est 2π périodique.

   (d) Par double intégration par partie en dérivant à chaque fois Φ on trouve le résultat.

   (e) On sait que f continue 2π périodique, désignons par $a_n(f)$ et $b_n(f)$ les coefficients de Fourier de f définies par: $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cos(nx)dx$ et $b_n(f) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sin(nx)dx$.

   On sait que $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \alpha x + \beta x + \Phi(x)$ et d'une part $a_n(F) = -\dfrac{a_n}{n^2}$ d'autre part $a_n(F) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}(\alpha x + \beta x + \Phi(x))cos(nx)dx$, comme l'application $x \mapsto xcos(nx)$ est impaire $\Longrightarrow \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} xcos(nx)dx = 0$ et $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} cos(nx)dx = [\frac{1}{n}sin(nx)]_{-\pi}^{\pi} = 0$

   donc $a_n(F) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\Phi(x)cos(nx)dx = -\frac{1}{n^2}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cos(nx)dx$, d'ou $a_n(f) = a_n$

   De même on montre que $b_n(f) = b_n$

Partie -III-

1. (a) la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} b_n \sin(nx)$ converge simplement sur $[0,\pi]$ vers une fonction f continue et comme $\forall n \geq 1$, $x \mapsto b_n sin(nx)$ impaire 2π-périodique donc $\displaystyle\sum_{n\geq 1} b_n \sin(nx)$ converge simplement vers une fonction $\widetilde{f}$ sur $\mathbb{R}$, impaire, 2π-périodique et prolongeant f, car $\widetilde{f} = f$ sur $[0,\pi]$.

   (b) Il suffit d'appliquer ce qui précède a $\widetilde{f}$ au lieu de f
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\widetilde{f}(x)\sin(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\widetilde{f}(x)\sin(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)dx.$$
   car $x \mapsto \widetilde{f}(x)\sin(nx)$ est paire.

2. (a) Il suffit de développer les deux expressions proposées pour obtenir le résultat demandé.

   (b) Si u_1 et u_2 sont solutions de (P) $\Longrightarrow J(u_1) \leq J(u_2)$ et $J(u_2) \leq J(u_1)$ donc $J(u_1) = J(u_2)$. Utilisons l'identité précédente on aura:
$$J((1-t)u_1 + tu_2) + \frac{t(1-t)}{2}\int_0^{\pi}[(u_1'(x) - u_2'(x))^2 + (u_1(x) - u_2(x))^2]dx = J(u_1).$$

comme $(1-t)u_1 + tu_2 \in E$ donc $\forall t \in \mathbb{R}$ $\frac{t(1-t)}{2}\int_0^\pi [(u_1'(x) - u_2'(x))^2 + (u_1(x) - u_2(x))^2]dx \geq 0 \Longrightarrow \int_0^\pi [(u_1'(x) - u_2'(x))^2 + (u_1(x) - u_2(x))^2]dx = 0$ or $(u_1' - u_2')^2 + (u_1 - u_2)^2 \geq 0$. continue $\Longrightarrow (u_1' - u_2')^2 + (u_1 - u_2)^2 = 0 \Longrightarrow u_1' = u_2'$ et $u_1 = u_2$.
et on s'intéresse au problème de minimisation suivant

(P) Trouver $u \in E$ tel que pour tout $v \in E$, $J(u) \leq J(v)$.

. (a) Il suffit de développer $J(u + tv)$.

(b) u solution de (P) ssi $\forall w \in E$ $J(u) \leq J(w)$ or $\forall w \in E$et$\forall t \in \mathbb{R}$, $\exists v \in E$, tq $w = u + tv$ et $J(u) \leq J(w) = J(u + tv)$ et donc si $t \geq 0$ $\frac{J(u+tv) - J(u)}{t} \geq 0$ et si $t \leq 0$ $\frac{J(u+tv) - J(u)}{t} \leq 0$ ce qui donne $\lim\limits_{t \to 0} \frac{J(u+tv) - J(u)}{t} = 0$ car l'application $t \mapsto J(u + tv)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et par la suite on aura (P')
Réciproquement si $\lim\limits_{t \to 0} \frac{J(u+tv) - J(u)}{t} = 0 \Longleftrightarrow u$ vérifie (P') $\Longrightarrow \forall v \in E$, $J(u) \leq J(w) = J(u + tv)$ or $\forall w \in E$et$\forall t \in \mathbb{R}$, $\exists v \in E$, tq $w = u + tv$ Donc u solution de (P).

(c) Si u solution (P) $\Longrightarrow u$ solution de (P') or $x \mapsto sin(nx) \in E \Longrightarrow \int_0^\pi (u'(x)ncos(nx) + u(x)sin(nx))dx = \int_0^\pi f(x)sin(nx)dx = \frac{\pi}{2}b_n$ or $\int_0^\pi (u'(x)cos(nx)dx = [u(x)cos(nx)]_0^\pi - n\int_0^\pi (u'(x)sin(nx)dx = n\int_0^\pi (u(x)sin(nx)dx$ D'ou le résultat

(a) En utilisant la partie II pour $a_n = 0$ et en ecrivant $F(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{n^2}sin(nx)$ et $\tilde{f}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n sin(nx)$, on sait que $F(x) = \alpha x + \beta x + \Phi(x)$ et donc de classe C^2 et $F''(x) = f(x)$.

D'autre par $\forall n \geq 1$, $f_n : x \mapsto -\frac{b_n}{n^2(n^2+1)}sin(nx)$ est de classe C^2 et on a: $f_n'(x) = -\frac{b_n}{n(n^2+1)}cos(nx)$ et $f_n''(x) = \frac{b_n}{n^2-1}sin(nx)$, vue que b_n tend vers 0, $\exists M_1, M_2, M_3$ tq $\forall x \in \mathbb{R}$, $\left|f_n'(x)\right| \leq \frac{M_1}{n(n^2+1)}$, $\left|f_n''(x)\right| \leq \frac{M_2}{n^2+1}$ et $|f_n(x)| \leq \frac{M_3}{n^2(n^2+1)}$, donc $\sum_{n\geq 1} f_n'$, $\sum_{n\geq 1} f_n''$ et $\sum_{n\geq 1} f_n$ convergeant normalement donc uniformement sur $\mathbb{R}$.

$\Longrightarrow x \mapsto -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{n^2(n^2+1)}sin(nx)$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ par la suite $\tilde{u}$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.
Il est clair que $\tilde{u}$ 2π-périodique.

(b) Il est clair que $\tilde{u}(0) = \tilde{u}(2\pi) = 0$. Si on pose $G(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{n^2(n^2+1)}sin(nx)$ donc

$\tilde{u} = F - G \Longrightarrow \tilde{u}'' = F'' - G''$, on a :$G'' = \tilde{u}$ et $F''(x) = \tilde{f}(x)$ donc $\tilde{u}$ verifiée $\tilde{u}(0) = \tilde{u}(2\pi) = 0$, et $-\tilde{u}'' + \tilde{u} = f$.

(c) La restriction de $\tilde{u}$ á l'intervalle $[0, \pi]$ qui est u est de classe C^2 et verifiée la même equation différentiellle aux condition limites que précédement.

(d) Soit $v \in E$, une intégration par parties donne $\int_0^\pi u'(x)+v'(x)dx - \int_0^\pi u(x)+v(x)dx = \int_0^\pi (u(x)-u''(x))v(x)dx = \int_0^\pi f(x)v(x)dx$, ainsi u est solution de (P') et donc de (P) qui lui est équivalent.