11

DOSSIER

DOCUMENT REPONSE

✓ Ce dossier comporte 15 pages numérotées de 1 à 15 :

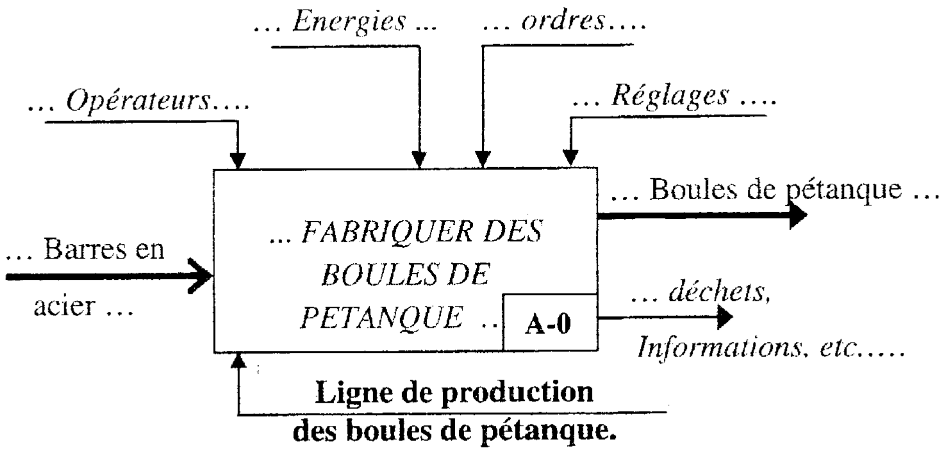
- Partie A - Technologie de Conception : Pages 1 et 2 ;
- Partie B – Mécanique : Pages 3 à 9 ;
- Partie C – Automatique : Pages 10 à 15 ;

✓ Un seul dossier document réponse est fourni au candidat et doit être rendu, en totalité, même sans réponses à la fin de l'épreuve.

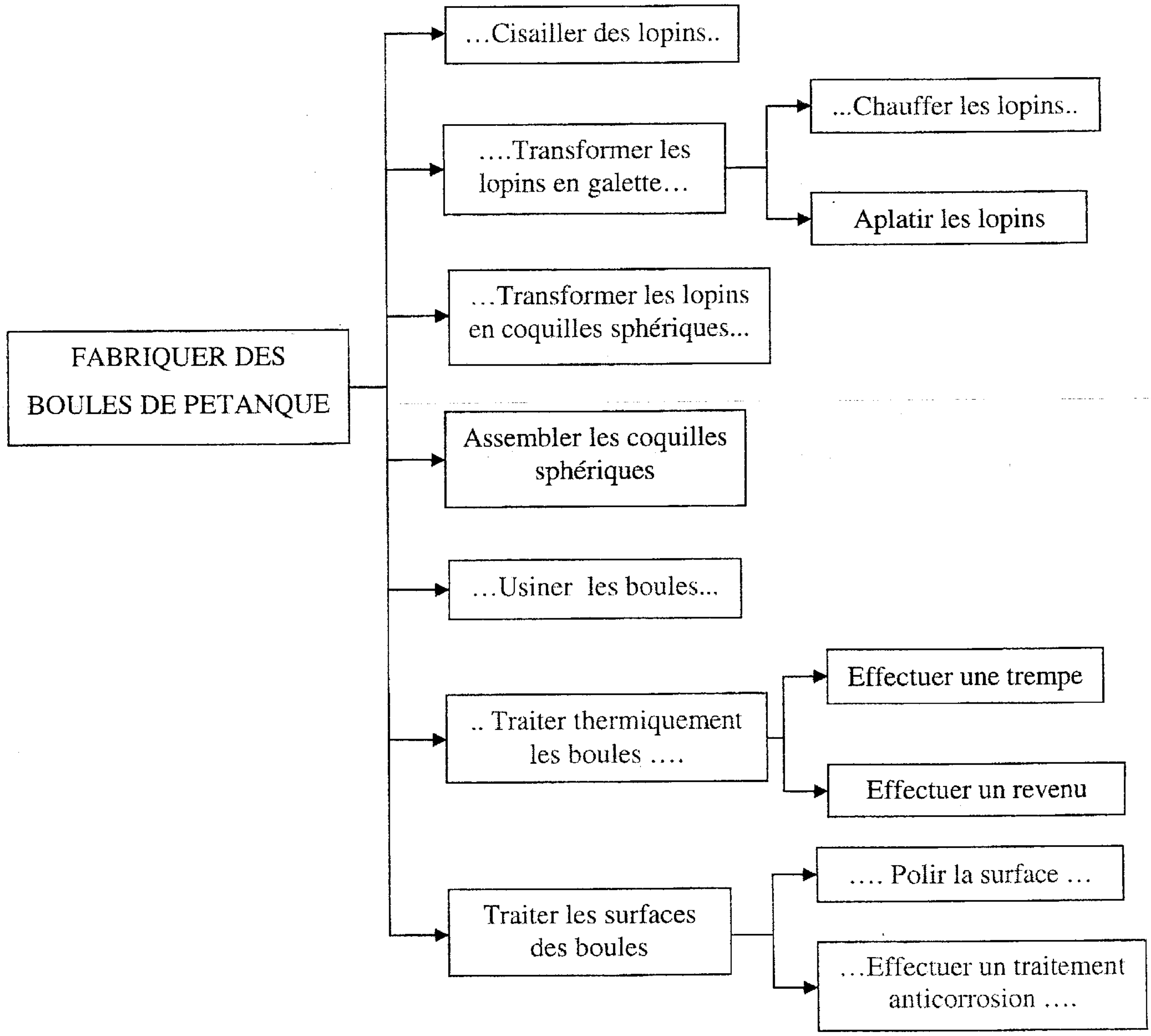
✓ Le renouvellement de ce dossier est interdit.

PARTIE A - TECHNOLOGIE DE CONCEPTION

A.1- Compléter l'actigramme A-0 de la ligne de production des boules de pétanque :



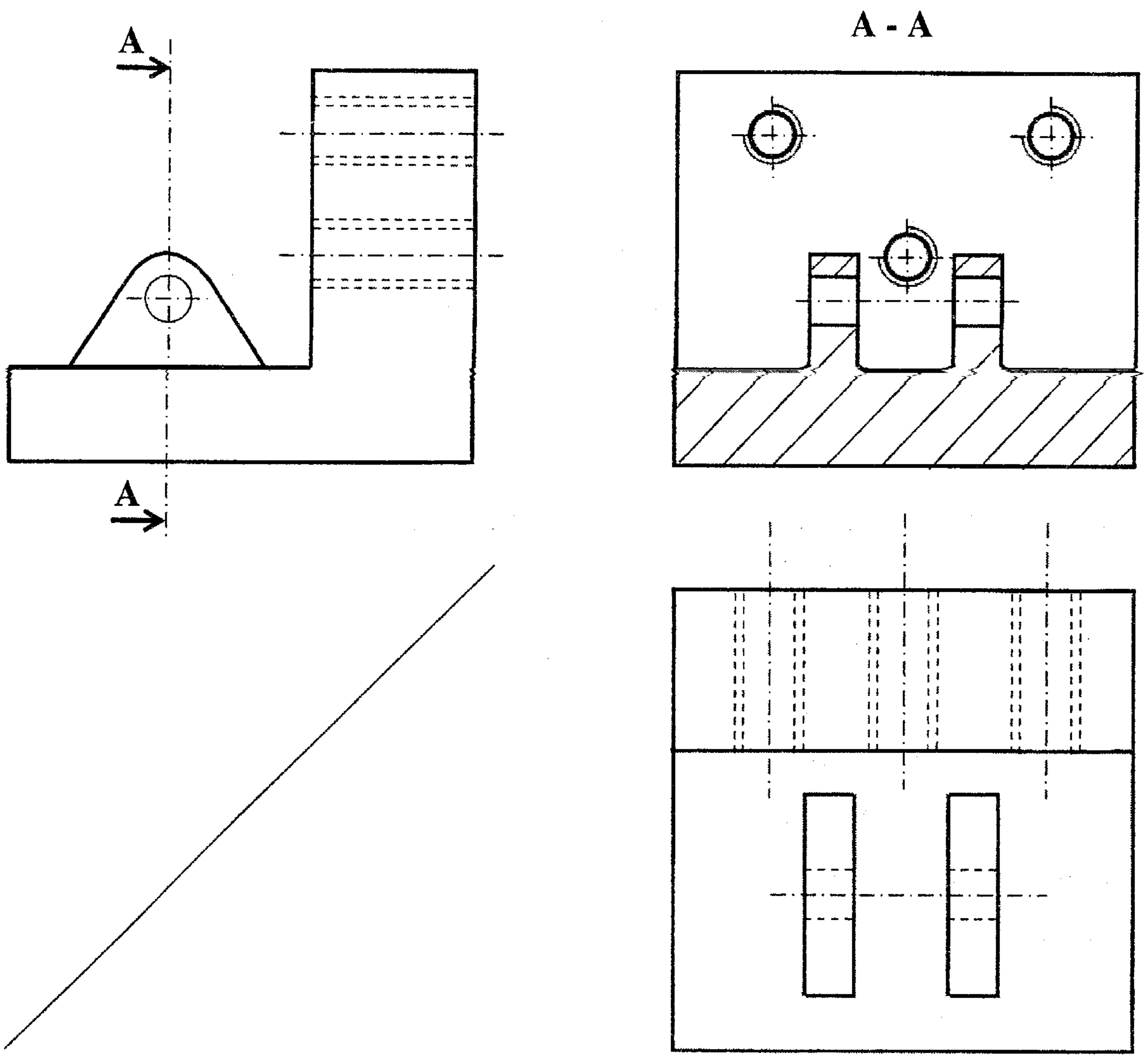
A.2- Compléter le diagramme FAST partiel suivant :



A.3- ETUDE GRAPHIQUE :

Le dessin ci-dessous représente le support d'articulation du cylindre de vérin qui commande la vé-came du système de transfert. Ce dessin comporte trois vues à compléter :

- la vue de face en coupe **A-A** ;
- la vue de dessus ;
- la vue de droite.



PARTIE B : MECANIQUE

B.1- ETUDE GEOMETRIQUE :

B.1.1- Ecrire, dans la base de R_0, les équations scalaires traduisant la condition de fermeture géométrique de la chaîne S_0-S_1-S_2-S_3-S_0. En déduire le nombre de degrés de liberté du système.

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC}$$

$\lambda Cos\alpha - 2eSin\beta = a$ (1) $\lambda Sin\alpha + 2eCos\beta = b$ (2)	*Degré de liberté d :* ***d*** = ...3 – 2 = 1.....

B.1.1- Déduire la relation entre λ et β ;

(1) ⇔ $\lambda Cos\alpha = a + 2eSin\beta$

(2) ⇔ $\lambda Sin\alpha = b - 2eCos\beta$

(1)² + (2)² ⇔ $\lambda^2 = a^2 + b^2 + 4e(aSin\beta - bCos\beta)$

Relation entre $\boldsymbol{\lambda}$ *et* $\boldsymbol{\beta}$: $\lambda^2 = a^2 + b^2 + 4e^2 + 4e(aSin\beta - bCos\beta)$

B.2- GEOMETRIE DE MASSES :

On considère l'ensemble (S) regroupant les solides (S_3) et (S_4) : $S = \{S_3, S_4\}$ (Figure 2-B). (S_3), dont les trous des axes d'articulation sont négligés, est assimilé à un secteur de cylindre homogène de rayon **R**, de longueur **2L** et de masse $\boldsymbol{m_3}$. (S_4) est une boule homogène **supposée pleine**, de masse $\boldsymbol{m_4}$ et de rayon **r**. Le centre d'inertie G_3 de (S_3) et G_4 de (S_4) appartiennent au plan de symétrie $(D, \vec{x}_3, \vec{y}_3)$. On notera $\boldsymbol{M}$ la masse de (S) : $\boldsymbol{M = m_3 + m_4}$.

B.2.1- Déterminer, dans la base de R_3, le vecteur position de G_3 centre d'inertie de (S_3): $\overrightarrow{DG_3}$;

$(D, \vec{x}_3)$ est un axe de symétrie de $(S_3) \Rightarrow G_3 \in (D, \vec{x}_3) \Leftrightarrow y_{G_3} = z_{G_3} = 0$

(S_3) homogène $\Rightarrow Vx_G = \int_{P\in S} x_p dV(P) = \int_0^R \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} 2LrCos\theta \, rdrd\theta = 2L\frac{-\sqrt{2}}{3}R^3$ ... et $V = \frac{3}{2}L\pi R^2$

$\Rightarrow x_{G_3} = \frac{-4\sqrt{2}}{9}\frac{R}{\pi}$

$$\overrightarrow{DG_3} = \begin{array}{l} \\ \\ \\ (\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}) \end{array} \left| \begin{array}{c} \frac{-4\sqrt{2}}{9}\frac{R}{\pi} \\ 0 \\ 0 \end{array} \right.$$

B.2.2- Déterminer, dans la base de R_3, le vecteur position de centre G de (S) : $\overrightarrow{DG}$;

....

.... $M\overrightarrow{DG} = \sum_3^4 m_i \overrightarrow{DG}_i = m_3\overrightarrow{DG}_3 + m_4\overrightarrow{DG}_4$ ....

....

.... Or $\overrightarrow{DG}_3 = \frac{-4\sqrt{2}}{9}\frac{R}{\pi}\vec{x}_3 = x_{G_3}\vec{x}_3$...... et $\overrightarrow{DG}_3 = c\vec{x}_3$ ......

....

.... $\overrightarrow{DG} = \frac{m_3 x_{G_3} + m_4 c}{M}\vec{x}_3$.......................................

....

$$\boxed{\overrightarrow{DG} = \left|\begin{matrix} \dots\frac{m_3 x_{G_3} + m_4 c}{M}\dots\dots \\ \dots\dots\dots 0 \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots 0 \dots\dots\dots \end{matrix}\right._{(\vec{x}_3,\vec{y}_3,\vec{z})}}$$

B.2.3- Montrer que la matrice d'inertie de (S) au point D est diagonale dans la base de R_3 :

.... Deux plans de symétrie : $(D,\vec{x}_3,\vec{y}_3)$ et $(D,\vec{x}_3,\vec{z})$ $\Leftrightarrow$ $P_{Dx_3y_3} = P_{Dx_3z} = P_{Dy_3z} = 0$ ....

.... Donc la matrice d'inertie de (S) au point D est diagonale dans la base de R_3 ....

B.2.4- Déterminer le moment d'inertie de (S_3) par rapport à l'axe $(D,\vec{z})$: $\boldsymbol{I_3}$;

....

.... $I_3 = \int r^2 dm(P) = \int r^2 \rho dv(P) = \int_0^R \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} r^2 \rho 2Lrdrd\theta$...... avec $\rho = \frac{m_3}{V} = \frac{2m_3}{3\pi LR^2}$ ...

.............$I_3 = \frac{m_3R^2}{2}$ ....

....

$$\boxed{\boldsymbol{I_3} = \dots\frac{m_3R^2}{2}\dots\dots}$$

B.2.5- Déterminer le moment d'inertie de (S) par rapport à l'axe $(D,\vec{z})$: $\boldsymbol{I}$;

....

.............$I = I_3 + I_{Dz}(S_4)$ ...... or $I_{Dz}(S_4) = I_{G_4z}(S_4) + m_4c^2 = \frac{2}{5}m_4r^2 + m_4c^2$ ....

....

.... $I = \frac{m_3R^2}{2} + m_4(\frac{2}{5}r^2 + c^2)$ ....

....

$$\boxed{\boldsymbol{I} = \dots\frac{m_3R^2}{2} + m_4(\frac{2}{5}r^2 + c^2)\dots\dots}$$

B.3- ETUDE CINEMATIQUE :

B.3.1- Exprimer, dans la base de R_1, les torseurs cinématiques suivants :

B.3.1.1- de mouvement de (S_1) par rapport à (S_0) au point A : $\{V(S_1/S_0)\}_A = \begin{Bmatrix} \dots\dots\dots\dot{\alpha}\vec{z}\dots\dots \\ \dots\dots L\dot{\alpha}\vec{y}_1\dots\dots \end{Bmatrix}_A$;

B.3.1.2- de mouvement de (S_2) par rapport à (S_0) au point B : $\{V(S_2/S_0)\}_B = \begin{Bmatrix} \dots\dots\dots\dot{\alpha}\vec{z}\dots\dots \\ \dots\dot{\lambda}\vec{x}_1 + \lambda\dot{\alpha}\vec{y}_1 \end{Bmatrix}_B$;

B.3.1.3- de mouvement de (S_3) par rapport à (S_0) au point C : $\{V(S_3/S_0)\}_C = \begin{Bmatrix} \dots\dots\dot{\beta}\vec{z}\dots \\ \dots\dots\vec{0}\dots\dots \end{Bmatrix}_C$;

B.3.2- Déterminer, en fonction de $\dot{\beta}$, le vecteur vitesse du point B appartenant à (S_3) par rapport à (S_0). En déduire, par projection dans la base de R_1, une relation entre $\dot{\beta}$ et $\dot{\lambda}$:

$\vec{V}(B \in S_3/S_0) = \vec{V}(C \in S_3/S_0) + \overrightarrow{BC} \wedge \vec{\Omega}(S_3/S_0) = 2e\dot{\beta}\vec{x}_3$

or $\vec{V}(B \in S_3/S_0) = \vec{V}(B \in S_2/S_0) \Rightarrow 2e\dot{\beta}(Cos(\beta - \alpha)\vec{x}_1 + Sin(\beta - \alpha)\vec{y}_1) = \dot{\lambda}\vec{x}_1 + \lambda\dot{\alpha}\vec{y}_1$

$\vec{V}(B \in S_3/S_0) =$ $2e\dot{\beta}\vec{x}_3$; *Relation entre* $\dot{\beta}$ *et* $\dot{\lambda}$: $\dot{\lambda} = 2e\dot{\beta}\, Cos(\beta - \alpha)$

B.3.3- Exprimer, dans la base de R_3, le vecteur vitesse du point G_4 centre de (S_4) : $\vec{V}(G_4 \in S_4/S_0)$ (la boule (S_4) est supposée fixe dans (S_3)) :

$\vec{V}(G_4 \in S_4/S_0) = \underbrace{\vec{V}(G_4 \in S_4/S_3)}_{\vec{0}} + \vec{V}(G_4 \in S_3/S_0) = \vec{V}(C \in S_3/S_0) + \overrightarrow{G_4C} \wedge \vec{\Omega}(S_3/S_0)$

$\vec{V}(G_4 \in S_4/S_0) = \dot{\beta}(e\vec{x}_3 + c\vec{y}_3)$

$\vec{V}(G_4 \in S_4/S_0) =$ $\dot{\beta}(e\vec{x}_3 + c\vec{y}_3)$

B.3.4- Exprimer, dans la base de R_3, le vecteur accélération du point G_4 centre de (S_4) : $\vec{\Gamma}(G_4 \in S_4/S_0)$

$\vec{\Gamma}(G_4 \in S_4/S_0) = \left.\frac{d\vec{V}(G_4 \in S_4/S_0)}{dt}\right)_{R_0} = (e\ddot{\beta} - c\dot{\beta}^2)\vec{x}_3 + (c\ddot{\beta} + e\dot{\beta}^2)\vec{y}_3$

$\vec{\Gamma}(G_4 \in S_4/S_0) =$ $(e\ddot{\beta} - c\dot{\beta}^2)\vec{x}_3 + (c\ddot{\beta} + e\dot{\beta}^2)\vec{y}_3$

B.3.5- Lorsque la boule (S_4) atteint la gouttière (S_5), son centre G_4 est sur l'axe $(C, \vec{x}_5)$. Si on note par $V_0 = \vec{V}(G_4 \in S_4/S_0).\vec{y}_5$ la vitesse initiale de G_4 par rapport à (S_5), donner l'expression de V_0:

$V_0 =$ $\sqrt{e^2 + c^2}\,\dot{\beta}$

B.4- ETUDE DYNAMIQUE :

Dans cette partie on suppose que le centre d'inertie G de (S) est confondu avec D ($\overrightarrow{DG} = \vec{0}$) et que le vérin (S_2) exerce sur (S_3) un effort axial au point B défini par : $\vec{F}(S_2 \rightarrow S_3) = F\vec{x}_1$.

B.4.1- Déterminer, en projection sur $\vec{z}$, le moment au point C des efforts extérieures exercés sur (S) :

$\overrightarrow{M}_C(\bar{S} \rightarrow S).\vec{z} = \overrightarrow{M}_C(S_0 \rightarrow S).\vec{z} + \overrightarrow{M}_C(\vec{g} \rightarrow S).\vec{z} + \overrightarrow{M}_C(S_2 \rightarrow S).\vec{z}$

$\overrightarrow{M}_C(\bar{S} \rightarrow S).\vec{z} = 2eFCos(\beta - \alpha) - eMgSin\beta$

$\boxed{\overrightarrow{M}_C(\bar{S} \rightarrow S).\vec{z} = 2eFCos(\beta - \alpha) - eMgSin\beta}$

B.4.2- Déterminer le moment cinétique au point C associé au mouvement de (S) par rapport à (S_0) ;

$\vec{\sigma}_C(S/S_0) = \vec{\sigma}_D(S/S_0) + M\overrightarrow{CD} \wedge \vec{V}(D \in S/S_0) = [I_D(S)]\vec{\Omega}(S/S_0) + M(-e\vec{y}_3) \wedge e\dot{\beta}\vec{x}_3$

$= (I + Me^2)\dot{\beta}\vec{z}$

ou $\vec{\sigma}_C(S/S_0) = [I_C(S)]\vec{\Omega}(S/S_0) = I_{cz}\dot{\beta}\vec{z}$ car C est fixe par rapport à S_0

avec $I_{cz} = I_{Gz} + Me^2 = I + Me^2$ (Th de Hygens)

$\boxed{\vec{\sigma}_C(S/S_0) = (I + Me^2)\dot{\beta}\vec{z}}$

B.4.3- Déterminer le moment dynamique au point C associé au mouvement de (S) par rapport à (S_0) ;

$\vec{\delta}_C(S/S_0) = \left.\frac{d\vec{\sigma}_C(S/S_0)}{dt}\right)_{R_0} = (I + Me^2)\ddot{\beta}\vec{z}$ car C est fixe par rapport à S_0

$\boxed{\vec{\delta}_C(S/S_0) = (I + Me^2)\ddot{\beta}\vec{z}}$

B.4.4- En appliquant le théorème du moment dynamique, en projection sur $\vec{z}$, à (S) au cours de son mouvement par rapport à (R_0), déterminer l'expression permettant de calculer la force F développée par le vérin (S_2) en fonction de $\boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ et $\ddot{\boldsymbol{\beta}}$ et des données du problème.

R_0 est supposé galiléen $\Leftrightarrow \vec{\delta}_C(S/S_0).\vec{z} = \overrightarrow{M}_C(\bar{S} \rightarrow S).\vec{z}$

$(I + Me^2)\ddot{\beta} = 2eFCos(\beta - \alpha) - eMgSin\beta$ et $\dot{\lambda} = 2e\dot{\beta}Cos(\beta - \alpha)$

$\boxed{F = \left[(I + Me^2)\ddot{\beta} + eMgSin\beta\right]\frac{\dot{\beta}}{\dot{\lambda}}}$

B.5- ETUDE DU MOUVEMENT DE LA BOULE DANS LA GOUTTIERE :

Une fois transférer, la boule (S_4) commence à rouler sans glisser dans la gouttière (S_5) à travers un contact ponctuel en deux points $\boldsymbol{I}$ et $\boldsymbol{J}$ et sous l'effet d'une adhérence de coefficient f.

L'action mécanique de contact de la gouttière (S_5) sur la boule (S_4) aux points $\boldsymbol{I}$ et $\boldsymbol{J}$ est définie par les deux torseurs : $\{T_1(S_5 \to S_4)\}_I = \begin{Bmatrix} N\vec{n}_I - T\vec{y}_5 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_I$ et $\{T_2(S_5 \to S_4)\}_J = \begin{Bmatrix} N\vec{n}_J - T\vec{y}_5 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_J$

Le moment d'inertie de la boule par rapport à l'axe $(G_4, \vec{z})$ est : $I_{G_4 z} = \frac{2}{5} m_4 r^2$.

B.5.1- En se basant sur la condition de roulement sans glissement de (S_4) par rapport à (S_5), déterminer, en fonction de $\dot{\varphi}$, le vecteur vitesse du point G_4 centre de (S_4) par rapport à (R_5) :

....

........$\vec{V}(G_4 \in S_4/R_5) = \vec{V}(I \in S_4/R_5) + \overrightarrow{G_4 I} \wedge \vec{\Omega}(S_4/R_5) = -r\vec{n}_I \wedge \dot{\varphi}\vec{z} = \frac{\sqrt{2}}{2} r\dot{\varphi}\, \vec{y}_5$..............

....

$\boxed{\vec{V}(G_4 \in S_4/R_5) = \ldots\ldots\ \frac{\sqrt{2}}{2} r\dot{\varphi}\, \vec{y}_5 \ldots}$

B.5.2- Déterminer l'énergie cinétique de (S_4) dans son mouvement par rapport à R_5;

....

.... $Ec(S_4/R_5) = \frac{1}{2}\left(I_{G_4 z}\dot{\varphi}^2 + m_4 \vec{V}^2(G_4 \in S_4/R_5)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5} m_4 r^2 \dot{\varphi}^2 + m_4 \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi}^2\right)$ ....

....

$\boxed{Ec(S_4/R_5) = \ldots\ \frac{9}{20} m_4 r^2 \dot{\varphi}^2 \ldots}$

B.5.3- Déterminer la puissance des actions mécaniques extérieures exercées sur (S_4) au cours de son mouvement par rapport à R_5 ;

....

..... $P(\bar{S}_4 \to S_4/R_5) = \underbrace{P(S_5 \to S_4/R_5)}_{0} + P(\vec{g} \to S_4/R_5) = m_4 \vec{g}.\vec{V}(G_4 \in S_4/R_5)$ ....

....

.... $P(\bar{S}_4 \to S_4/R_5) = \frac{\sqrt{2}}{2} r m_4 g \, Sin\gamma\, \dot{\varphi}$...

....

$\boxed{P(\bar{S}_4 \to S_4/R_5) = \ldots\ \frac{\sqrt{2}}{2} r m_4 g \, Sin\gamma\, \dot{\varphi} \ldots}$

B.5.4- Appliquer le théorème de l'énergie cinétique à (S_4) au cours de son mouvement par rapport R_5. En déduire son équation de mouvement.

……R_5 (fixe par rapport à R_0) est supposé galiléen $\Rightarrow P(\bar{S}_4 \rightarrow S_4/R_5) = \frac{dEc(S_4/R_5)}{dt}$ ………………

……………………………………………………………………………………………

…………$\frac{\sqrt{2}}{2} r m_4 g\ Sin\gamma\ \dot{\varphi} = \frac{9}{10} m_4 r^2 \dot{\varphi}\ddot{\varphi} \Leftrightarrow 9r\ddot{\varphi} - 5\sqrt{2}g\ Sin\gamma = 0$……………………………

……………………………………………………………………………………………

Equation de mouvement de S_4/R_5 :……… $9r\ddot{\varphi} - 5\sqrt{2}g\ Sin\gamma = 0$………

Soit $\boldsymbol{y}$ l'ordonnée du centre d'inertie G_4 de (S_4) sur l'axe $(E, \vec{y}_5)$: $\overrightarrow{EG_4} = y\vec{y}_5$. On suppose qu'initialement à $\boldsymbol{t = 0}$: $\boldsymbol{\varphi = 0, y = 0}$ et $\boldsymbol{\dot{y} = \frac{dy}{dt} = V_0}$.

B.5.5- Exprimer l'équation de mouvement de (S_4) par rapport à R_5 en fonction de $\ddot{y}$.

……………………………………………………………………………………………

………$\vec{V}(G_4 \in S_4/R_5) = \dot{y}\vec{y}_5 = \frac{\sqrt{2}}{2} r\dot{\varphi}\ \vec{y}_5 \Leftrightarrow \dot{y} = \frac{\sqrt{2}}{2} r\dot{\varphi} \Leftrightarrow \ddot{y} = \frac{\sqrt{2}}{2} r\ddot{\varphi} \Leftrightarrow \sqrt{2}\ddot{y} = r\ddot{\varphi}$ …………

……………………$9\sqrt{2}\ddot{y} - 5\sqrt{2}g\ Sin\gamma = 0$…………………………………………

……………………………………………………………………………………………

Equation de mouvement de S_4/R_5 :…… $9\ddot{y} - 5g\ Sin\gamma = 0$……….

B.5.6- Déterminer le paramètre de position $\boldsymbol{y(t)}$:

……………………………………………………………………………………………

…………… $\ddot{y} = \frac{5}{9} g\ Sin\gamma \Rightarrow \dot{y} = \left(\frac{5}{9} g\ Sin\gamma\right) t + C_1$ or pout $t = 0, \dot{y} = V_0 \Rightarrow C_1 = V_0$ …………

………………$\Rightarrow \dot{y} = \left(\frac{5}{9} g\ Sin\gamma\right) t + V_0$ ……………………………………………

……………………………………………………………………………………………

………………$\Rightarrow y = \left(\frac{5}{18} g\ Sin\gamma\right) t^2 + V_0 t + C_2$ or pout $t = 0, y = 0 \Rightarrow C_2 = 0$ …………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………

……………………………………………………

……………………………………………………

$\boldsymbol{y(t)} =$ … $y = \left(\frac{5}{18} g\ Sin\gamma\right) t^2 + V_0 t$……………

B.5.7- En appliquant le théorème de la résultante dynamique à (S_4) au cours de son mouvement par rapport R_5, exprimer, en fonction de m_4, g et γ, les efforts tangentiel et normal (T et N) exrcés par la gouttière (S_5) sur la boule (S_4) :

.........R_5 est supposé galiléen $\Rightarrow \vec{R}(\bar{S}_4 \to S_4) = m_4\vec{\Gamma}(G_4 \in S_4/R_5) = m_4\ddot{y}\,\vec{y}_5$ ....

.... $\begin{cases} \sqrt{2}N - m_4 g Cos\gamma = 0 & (1) \\ m_4 g Sin\gamma - 2T = m_4\ddot{y} & (2) \end{cases}$ .... et $\ddot{y} = \frac{5}{9} g\, Sin\gamma$ ....

....

....

N = ...$\frac{1}{\sqrt{2}} m_4 g Cos\gamma$ ....

T = ...$\frac{2}{9} m_4 g Sin\gamma$ ....

B.5.8- En se basant sur la loi de Coulomb relative au roulement sans glissement, déterminer la valeur maximale de l'angle γ pour que (S_4) roule sans glisser sur la gouttière (S_5) :

....

.... Roulement sans glissement $\Leftrightarrow \|\vec{T}\| \le f\|\vec{N}\| \;\Leftrightarrow\; \frac{2}{9} m_4 g Sin\gamma \le \frac{1}{\sqrt{2}} f m_4 g Cos\gamma$ ....

....

.... $tan\,\gamma \le \frac{9}{2\sqrt{2}} f$ ....

....

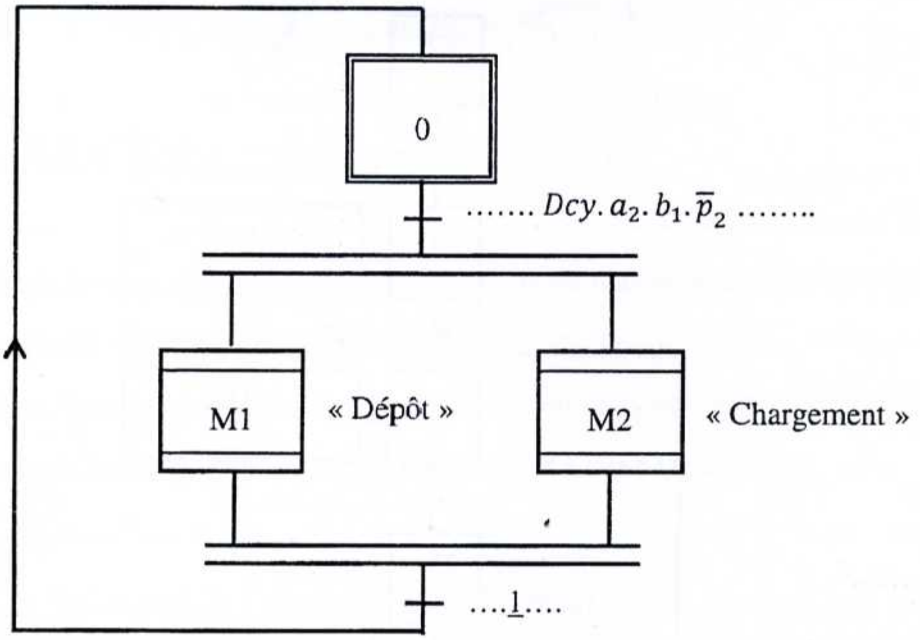
....

$\boldsymbol{tan\,\gamma} \le$ ...$\frac{9}{2\sqrt{2}} f$ ....

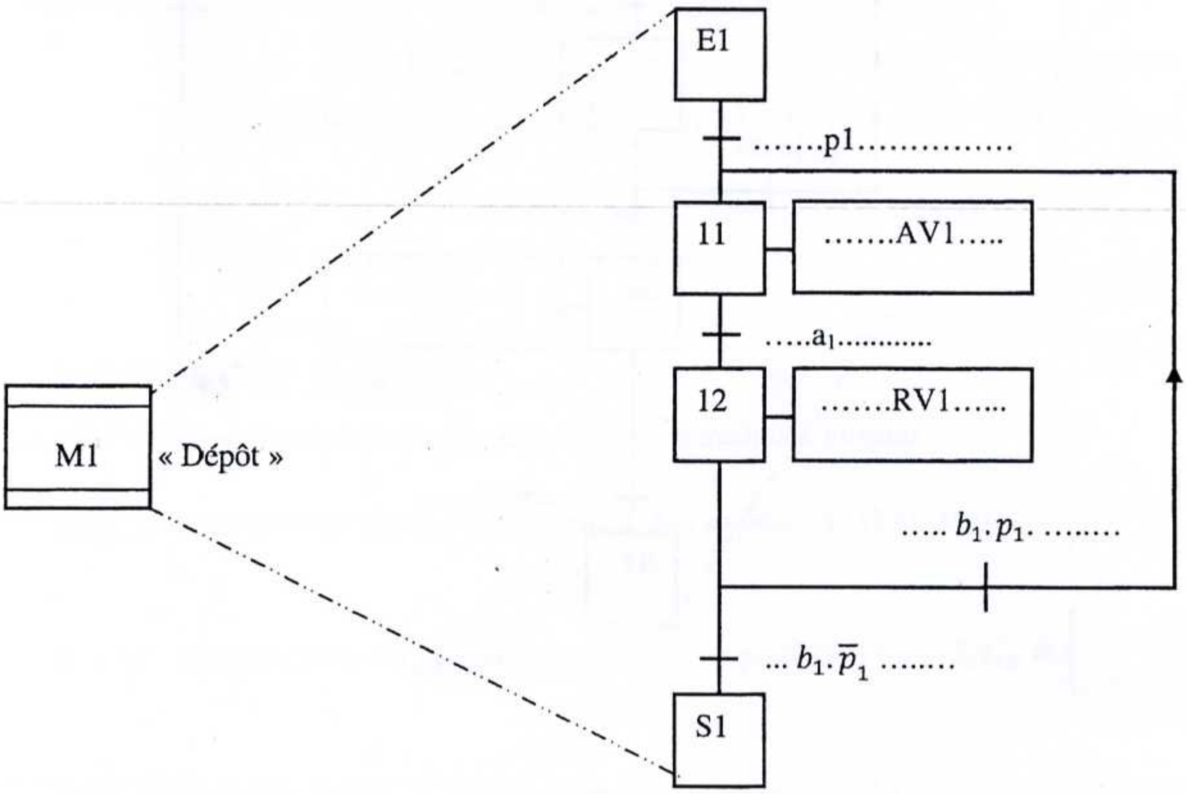
PARTIE C - AUTOMATIQUE

C.1- Commande séquentielle du poste de transfert des boules :

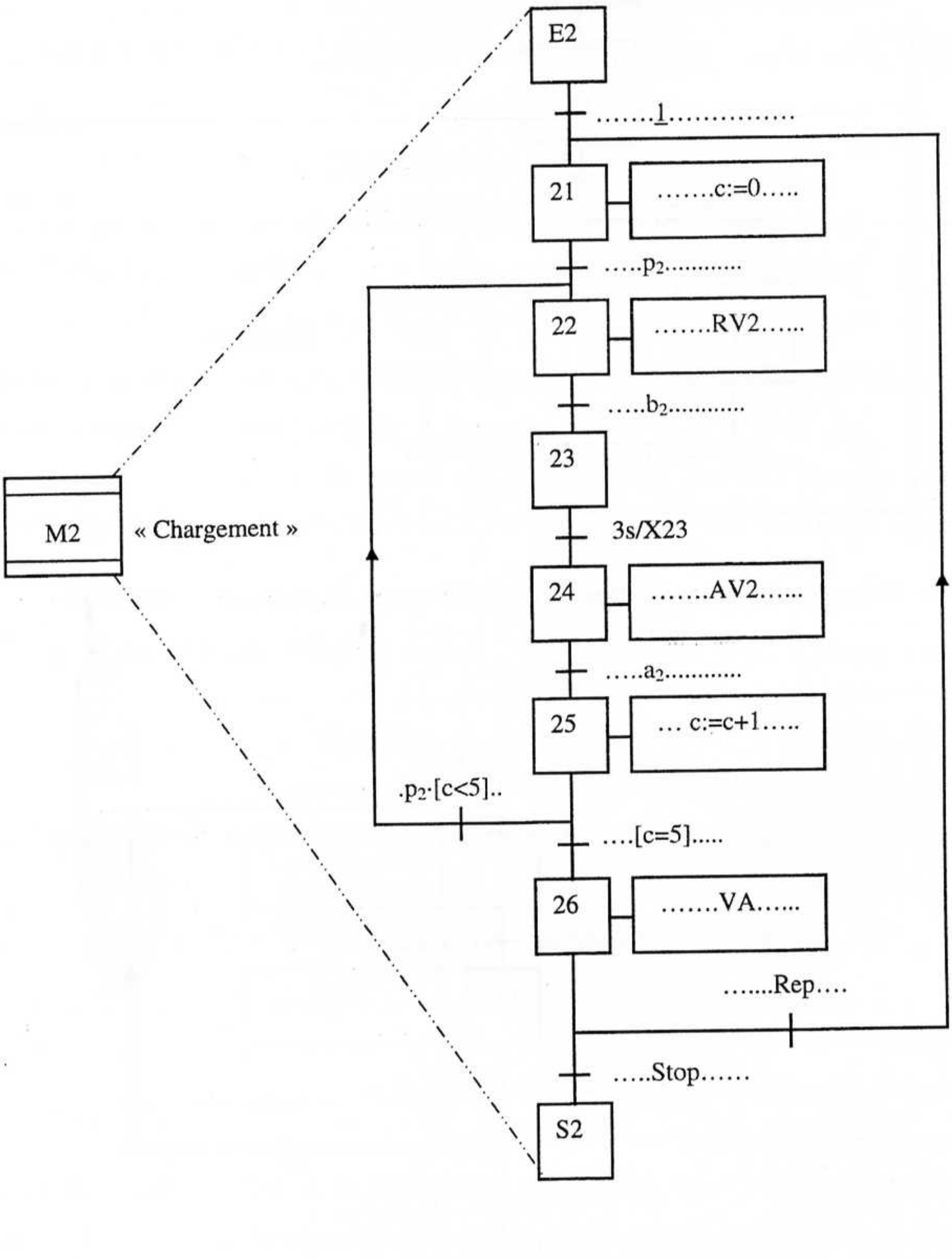
C.1.1- ***Compléter*** le GRAFCET suivant qui décrit le fonctionnement du système de transfert:



C.1.2- ***Compléter*** l'expansion de la macro-étape M1 « Dépôt » dont la structure est donnée ci-dessous:



C.1.3- ***Compléter*** l'expansion de la macro-étape M2 « Chargement » dont la structure est donnée ci-dessous:



C.2- REGULATION DE LA TEMPERATURE DU FOUR TUNNEL :

Premier cas : régulateur proportionnel avec retour unitaire

$$C_1(p) = k_r \quad \text{avec } k_r > 0, \qquad C_2(p) = 1$$

Dans ce cas, on suppose que la perturbation est nulle : $l(t) = 0$.

C.2.1- Donner l'expression de la fonction de transfert en boucle fermée $H_{BF}(p) = \frac{Y(p)}{Y_{ref}(p)}$ (la mettre sous la forme canonique standard d'un système de premier ordre $\frac{k_{BF}}{1+\tau_{BF}p}$). ***Exprimer*** le gain statique k_{BF} et la constante de temps τ_{BF} en fonction de k_r, k et τ avec $k = k_1.k_2$.

....

$$H_{BF}(p) = \frac{C_1(p)H(p)}{1+C_1(p)H(p)} = \frac{\frac{kk_r}{1+kk_r}}{1+\frac{\tau}{1+kk_r}p} = \frac{k_{BF}}{1+\tau_{BF}p}$$

Par identification, on obtient : $k_{BF} = \frac{kk_r}{1+kk_r}$ et $\tau_{BF} = \frac{\tau}{1+kk_r}$

....

....

C.2.2- Donner l'expression de l'erreur statique (e_s) sachant que le signal de référence est un échelon de position d'amplitude y_{c1}.

....

$$E(p) = Y_{ref}(p) - Y(p) = \left(1 - H_{BF}(p)\right)Y_{ref}(p)$$

$$E(p) = \frac{1}{1+C_1(p)H(p)}Y_{ref}(p) \quad \text{et} \quad Y_{ref}(p) = \frac{1}{p}y_{c1}$$

....

L'erreur statique est donnée par : $e_s = \lim_{p\to 0} pE(p) = \frac{1}{1+kk_r}y_{c1}$

....

C.2.3- Donner l'expression de la valeur initiale du signal de commande sachant que le signal de référence est un échelon de position d'amplitude y_{c1}.

....

$U(p) = k_rE(p)$ d'où $U(p) = \frac{k_r}{1+C_1(p)H(p)}Y_{ref}(p)$ et $Y_{ref}(p) = \frac{1}{p}y_{c1}$

La valeur initiale est donnée par : $u(0) = \lim_{p\to\infty} pU(p) = k_ry_{c1}$

....

....

C.2.4- On fixe k_r de façon à limiter la valeur initiale de la commande à (+ 10 V). Sachant que $y_{c1} = 8\ V$, **Donner** les valeurs de k_r, k_{BF}, τ_{BF} et de l'erreur statique e_s. **En déduire** la valeur de la température θ dans le four en régime permanent.

.... On a: $u(0) = k_r y_{c1}$, $k = k_1 k_2 = 1$, $k_{BF} = \frac{kk_r}{1+kk_r}$, $\tau_{BF} = \frac{\tau}{1+kk_r}$, $e_s = \frac{1}{1+kk_r} y_{c1}$.......

.... $k_r = 1.25$ $k_{BF} = 0.555$ $\tau_{BF} = 160\ s$ $e_s = 3.555\ V$............................

....

.... $e_s = y_{c1} - y_\infty$ donc $y_\infty = y_{c1} - e_s = 4.444\ V$ $\theta = \frac{y_\infty}{0.02} = 222.222\ °C$ ....

....

Deuxième cas : régulateur proportionnel avec retour non unitaire

$$C_1(p) = k_r \quad \text{avec } k_r > 0, \qquad C_2(p) = \lambda$$

C.2.5- On suppose que : $l(t) = 0$.

C.2.5.1- Donner la nouvelle expression de l'erreur statique dans le cas où le signal de référence est un échelon de position d'amplitude y_{c1}. **Donner** l'expression du paramètre λ permettant d'annuler l'erreur statique de position.

....

.... $E(p) = Y_{ref}(p) - Y(p) = Y_{ref}(p) - \cancel{\lambda C_1(p)H(p)E(p)}$ $H_{BF}(p)Y_{ref}(p)$ ....

.... $E(p) = \frac{1+(\lambda-1)C_1(p)H(p)}{1+\lambda C_1(p)H(p)} Y_{ref}(p)$ et $Y_{ref}(p) = \frac{1}{p} y_{c1}$...............................

....

.... L'erreur statique est donnée par : $e_s = \lim_{p\to 0} pE(p) = \frac{1+(\lambda-1)kk_r}{1+\lambda kk_r} y_{c1}$...........

.... L'erreur statique est nulle lorsque : $\lambda = \frac{kk_r-1}{kk_r}$ ....

C.2.5.2- Donner l'expression de la fonction de transfert en boucle fermée pour la valeur de λ calculée dans la question précédente. **Donner** la valeur de la constante de temps du système en boucle fermée sachant que $k_r = 1{,}25$.

....

.... $H_{BF}(p) = \frac{C_1(p)H(p)}{1+C_1(p)C_2(p)H(p)} = \frac{\frac{kk_r}{1+\lambda kk_r}}{1+\frac{\tau}{1+\lambda kk_r}p}$ ....

.... Pour la valeur de : $\lambda = \frac{kk_r-1}{kk_r}$, on obtient : $H_{BF}(p) = \frac{1}{1+\frac{\tau}{kk_r}p}$ ....

.... $\tau_{BF} = \frac{\tau}{kk_r}$ .... $\tau_{BF} = 288\ s$ ....

....

....

C.2.6- On suppose que $l(t) \neq 0$. La perturbation est de type échelon de position.

C.2.6.1- En considérant que la consigne est nulle, **Donner** l'expression de la fonction de transfert : $F(p) = \frac{Y(p)}{L(p)}$:

$$Y(p) = H(p)U(p) + L(p) = -C_1(p)C_2(p)H(p)Y(p) + L(p)$$

Soit $\left(1 + C_1(p)C_2(p)H(p)\right)Y(p) = L(p)$

Ce qui conduit à $Y(p) = \frac{1}{1+C_1(p)C_2(p)H(p)} L(p)$

$$F(p) = \frac{Y(p)}{L(p)} = \frac{1}{1+C_1(p)C_2(p)H(p)}$$

$$F(p) = \frac{1+\tau p}{1+\lambda k k_r+\tau p}$$

C.2.6.2- Calculer la valeur finale de la sortie $y(t)$ sachant que le signal de perturbation est un échelon d'amplitude 1 V, $k_r = 1{,}25$ et λ est la valeur assurant une erreur statique nulle.

$$y_\infty = \lim_{p\to 0} pY(p) = \lim_{p\to 0} pF(p)L(p) \Leftrightarrow y_\infty = \lim_{p\to 0} p\frac{1+\tau p}{1+\lambda k k_r+\tau p}\frac{1}{p}$$

$$y_\infty = \frac{1}{1+\lambda k k_r}$$

On remplace λ par sa valeur assurant une erreur statique nulle, on obtient : $y_\infty = \frac{1}{k k_r}$

$$y_\infty = \frac{1}{1.25} = 0.8\ V$$

3ème Cas : régulateur proportionnel intégral avec retour unitaire

$$C_1(p) = k_r\left(1 + \frac{1}{T_i p}\right) \qquad \text{et} \qquad C_2(p) = 1$$

C.2.7- On suppose que $l(t) = 0$.

C.2.7.1- Donner l'expression de la fonction de transfert en boucle fermée $H_{BF}(p) = \frac{Y(p)}{Y_{ref}(p)}$.

$$H_{BF}(p) = \frac{C_1(p)H(p)}{1+C_1(p)H(p)} = \frac{k k_r(1+T_i p)}{T_i\tau p^2+T_i(1+k k_r)p+k k_r}$$

C.2.7.2- On pose: $x = kk_r$, **Donner** l'expression de dénominateur $D(p)$ de $H_{BF}(p)$ en fonction de x, T_i et τ. **Donner**, selon la nature de la réponse du système en boucle fermée (réponse apériodique ou réponse pseudo-périodique), la relation entre les paramètres x, T_i et τ.

$$D(p) = T_i\tau p^2 + T_i(1 + kk_r)p + kk_r = T_i\tau p^2 + T_i(1 + x)p + x$$

Le discriminant est donné par : $\Delta(p) = T_i^2(1 + x)^2 - 4T_i\tau x$

Réponse apériodique : $\Delta(p) \geq 0 : \frac{\tau}{T_i} \leq \frac{(1+x)^2}{4x}$

Réponse pseudo périodique : $\Delta(p) < 0 : \frac{\tau}{T_i} > \frac{(1+x)^2}{4x}$

C.2.8- On suppose que $l(t) \neq 0$. La perturbation est de type échelon de position.

C.2.8.1- En considérant que la consigne est nulle, **Donner** l'expression de la fonction de transfert : $F(p) = \frac{Y(p)}{L(p)}$.

$$Y(p) = \frac{1}{1+C_1(p)H(p)}L(p) \Leftrightarrow F(p) = \frac{Y(p)}{L(p)} = \frac{1}{1+C_1(p)H(p)}$$

$$F(p) = \frac{T_i p(1+\tau p)}{T_i\tau p^2+T_i(1+kk_r)p+kk_r}$$

C.2.8.2- Calculer la valeur finale de la sortie $y(t)$ sachant que le signal de perturbation est un échelon d'amplitude 1 V.

$$y_\infty = \lim_{p\to 0} pY(p) = \lim_{p\to 0} pF(p)L(p)$$

$$y_\infty = \lim_{p\to 0} p\frac{T_i p(1+\tau p)}{T_i\tau p^2+T_i(1+kk_r)p+kk_r}\frac{1}{p}$$

$$y_\infty = 0$$

C.2.9- Comparer les performances des régulateurs étudiés.

Régulateur proportionnel : erreur statique non nulle, dynamique rapide.

Régulateur proportionnel avec retour non unitaire : erreur statique nulle, dynamique lente, n'élimine pas l'effet de la perturbation.

Régulateur proportionnel intégral : erreur statique nulle, la dynamique dépend des paramètres du régulateur, élimine l'effet de la perturbation.