

Juin 2008

**Partie I** (Etude d'un exemple)

1. a) $f(e_1) = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $f^2(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$. Comme $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$, donc $\mathcal{B}' = (e_1, f(e_1), f^2(e_1))$ est une base de E .

b) $f^3(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$. La matrice de f relativement à la base \mathcal{B}' est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

c) $f^4(e_1) = e_1$, $f^4(f(e_1)) = f(f^4(e_1)) = f(e_1)$ et $f^4(f^2(e_1)) = f^2(f^4(e_1)) = f^2(e_1)$. Donc $f^4 = \text{id}_E$ car \mathcal{B}' est une base.

d) Comme $f^4(e_1) = e_1$, $(e_1, f(e_1), f^2(e_1), f^3(e_1))$ est un système générateur de \mathbb{K}^3 , donc f est cyclique d'ordre 4 et $(e_1, f(e_1), f^2(e_1), f^3(e_1))$ est un cycle de f .

2. a) Le polynôme caractéristique de f est $P_f(X) = -(X+1)(X^2+1)$.

b) Un vecteur propre w pour la valeur propre i est donné par: $w = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$w_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $w_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.



c) Comme f est à coefficients réels, $f(w_1) = -w_2$ et $f(w_2) = w_1$. On pose $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ un vecteur propre de f pour la valeur propre -1 , $v_2 = w_1$ et $v_3 = w_2$. Alors $\mathcal{B}_1 = (v_1, v_2, v_3)$ de \mathbb{R}^3 . Comme $f(v_1) = -v_1$, $f(v_2) = -v_3$ et $f(v_3) = v_2$, la matrice de f relativement à cette base est la matrice $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ dans $M_3(\mathbb{R})$.

3. a) Si φ est une forme bilinéaire symétrique sur \mathbb{R}^3 qui vérifie: $\varphi(f(x), f(y)) = \varphi(x, y)$, pour tous $x, y \in \mathbb{R}^3$, alors $\varphi(v_1, v_2) = \varphi(f(v_1), f(v_2)) = \varphi(v_1, v_3) = \varphi(f(v_1), f(v_3)) = -\varphi(v_1, v_2) = 0$. De même $\varphi(v_2, v_3) = \varphi(f(v_2), f(v_3)) = -\varphi(v_2, v_3) = 0$. Donc la base \mathcal{B}_1 est orthogonale par rapport à φ .

- b) $\varphi(v_2, v_2) = \varphi(v_3, v_3)$, donc la matrice de φ dans cette base est de la forme $\tilde{A} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$.

- c) La condition nécessaire et suffisante pour que φ soit définie positive est que $a > 0$ et $b > 0$.

- d) Si on note M^* la matrice de g^* , alors on a: ${}^t M \tilde{A} = \tilde{A} M^*$. Donc si $M = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$,

alors la matrice $M^* = \begin{pmatrix} a_1 & \frac{b}{a}a_2 & \frac{b}{a}a_3 \\ \frac{a}{b}b_1 & b_2 & b_3 \\ \frac{a}{b}b_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$.

Partie II

1. Comme $(a, f(a), \dots, f^{p-1}(a))$ est un système générateur de E , donc $p \geq n$.

2. a) Pour $k \in \mathbb{N}$, $f^p(f^k(a)) = f^k(f^p(a)) = f^k(a)$.

- b) Comme $(a, f(a), \dots, f^{p-1}(a))$ est un système générateur de E et f^p laisse fixe chaque vecteur de ce système, alors $f^p = \text{id}_E$; ce qui donne encore que f est bijective et f^{p-1} est l'endomorphisme inverse de f .

- c) Si λ est une valeur propre et $f(x) = \lambda x$, avec $x \neq 0$, alors $f^p(x) = x = \lambda^p x$, donc $\lambda^p = 1$.

3. a) Comme le système $(a, f(a), \dots, f^m(a))$ est lié, il existe $\alpha_0, \dots, \alpha_m$ non tous nuls tels que $\sum_{j=0}^m \alpha_j f^j(a) = 0$. Si $\alpha_m = 0$, alors le système $(a, f(a), \dots, f^{m-1}(a))$ sera lié, ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc $\alpha_m \neq 0$ et $f^m(a) \in E_m$.

- b) On suppose que $f^k(a) = \sum_{j=0}^{m-1} \alpha_j f^j(a)$ pour un $k \geq m$. On applique f à cette

inégalité, on aura: $f^{k+1}(a) = \sum_{j=1}^m \alpha_{j-1} f^j(a)$. Comme $f^m(a)$ est dans E_m , alors $f^{k+1}(a)$ est dans E_m .

c) Comme $(a, f(a), \dots, f^{p-1}(a))$ est un système générateur de E et que ce système de vecteurs est dans E_m , on aura: $E \subset E_m$, donc $E = E_m$ et donc le système $(a, f(a), \dots, f^{m-1}(a))$ est une base de E , donc $m = n$.

d) Si $P(X) = \sum_{j=0}^k a_j X^j$ est un polynôme non nul qui annule f , alors le système $(a, f(a), \dots, f^k(a))$ est un système lié, donc $k \geq n$. Donc P est de degré au moins n .

4. a) On considère l'endomorphisme g de E défini par: $g = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k = a_0 \text{id}_E + a_1 f + a_2 f^2 + \dots + a_{n-1} f^{n-1}$.

i) L'endomorphisme g commute avec f , donc $f \circ g = g \circ f$ et comme $g(a) = f^n(a)$, donc pour $k \in \mathbb{N}$, $g(f^k(a)) = f^k(g(a)) = f^{n+k}(a)$.

ii) On déduit de ce qui précède que $g = f^n$ sur les éléments de la base $(a, f(a), \dots, f^{n-1}(a))$, donc $g = f^n$ sur E . Ce qui donne que $f^n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k = a_0 \text{id}_E + a_1 f + a_2 f^2 + \dots + a_{n-1} f^{n-1}$.

b) La matrice de f relativement à la base $(a, f(a), \dots, f^{n-1}(a))$ est
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & a_{n-2} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

c) i) Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, la matrice de $f - \lambda \text{id}_E$ dans la base $(a, f(a), \dots, f^{n-1}(a))$ est
$$\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & -\lambda & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -\lambda & a_{n-2} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_{n-1} - \lambda \end{pmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & -\lambda & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -\lambda & a_{n-2} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_{n-1} - \lambda \end{vmatrix} = P_f(\lambda) = (-1)^n (\lambda^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k \lambda^k).$$

(On rappelle que le polynôme caractéristique de f annule f (théorème de Cayley Hamilton et tout polynôme qui annule f non nul est degré au moins n .)

Comme la matrice $\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & -\lambda & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -\lambda & a_{n-2} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_{n-1} - \lambda \end{pmatrix}$ admet une sous matrice de rang $n-1$ inversible, donc $\text{rang}(f - \lambda \text{id}_E) \geq n-1$. (Il suffit de prendre la matrice formée des lignes $2, \dots, n$ et les colonnes $1, \dots, n-1$).

ii) Si λ est une valeur propre, $\text{rang}(f - \lambda \text{id}_E) \leq n-1$, donc le sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ est de dimension 1 et donc f est diagonalisable.

5. Si $n = 2q$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

a) Le polynôme P_f est à coefficients réels et de degré $2q$. De plus les racines de P_f sont des racines p -ième de l'unité, donc si 1 est une valeur propre, alors -1 est une valeur propre.

b) La matrice de f est diagonalisable dans \mathbb{C} .

Si 1 et -1 sont des valeurs propres de f , alors les autres valeurs propres sont de la forme $e^{i\theta_j}$, avec $\theta_j = \frac{2k_j\pi}{p}$, $j \in \{1, \dots, q-1\}$ et $k_j \in \{1, \dots, p-1\}$. Pour $\lambda = e^{i\theta_j}$, il existe une base réelle du sous-espace propre E_λ telle que la matrice de la restriction de f sur E_λ est de la forme $\begin{pmatrix} \cos \theta_j & \sin \theta_j \\ -\sin \theta_j & \cos \theta_j \end{pmatrix}$. (cf : Partie I-3-c)). Donc il existe une base réelle de E telle que la matrice de f relativement à cette base est de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta_1 & \sin \theta_1 & \dots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & -\sin \theta_1 & \cos \theta_1 & \dots & \dots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \cos \theta_{q-1} & \sin \theta_{q-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & -\sin \theta_{q-1} & \cos \theta_{q-1} \end{pmatrix}$$

Si 1 et -1 ne sont pas des valeurs propres de f , alors les valeurs propres de f sont de la

forme $e^{i\theta_j}$, avec $\theta_j = \frac{2k_j\pi}{p}$, $j \in \{1, \dots, q\}$ et $k_j \in \{1, \dots, p-1\}$. Donc il existe une base réelle de E telle que la matrice de f relativement à cette base est de la forme

$$\begin{pmatrix} \cos \theta_1 & \sin \theta_1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ -\sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta_2 & \sin \theta_2 & \dots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & -\sin \theta_2 & \cos \theta_2 & \dots & \dots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \cos \theta_q & \sin \theta_q \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & -\sin \theta_q & \cos \theta_q \end{pmatrix}$$

6. a) Si $n = 2q + 1$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, alors P_f admet une racine réelle λ car il est de degré impair. Comme $f^p = \text{id}_E$, alors $\lambda \in \{-1, 1\}$.

b) Comme dans la question précédente, les sous-espaces propres sont de dimension 1 complexe, donc il existe une base de E telle que la matrice de f relativement à cette base est de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_1 & \sin \theta_1 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\sin \theta_1 & \cos \theta_1 & \dots & \dots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \cos \theta_q & \sin \theta_q \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & -\sin \theta_q & \cos \theta_q \end{pmatrix}$$

avec $\theta_j = \frac{2k_j\pi}{p}$, $j \in \{1, \dots, q\}$ et $k_j \in \{1, \dots, p-1\}$

7. On considère l'espace \mathbb{R}^n muni de sa base canonique et une matrice comme dans la question précédente. L'endomorphisme de \mathbb{R}^n associé à cette matrice est cyclique d'ordre p .

8. a) $f \circ h = \sum_{k=0}^{p-1} b_k f \circ f^k = \sum_{k=0}^{p-1} b_k f^{k+1} = h \circ f.$

b) $h(f^k(a)) = \sum_{j=0}^{p-1} b_j f^j \circ f^k(a) = \sum_{j=0}^{p-1} b_j f^{j+k}(a) = g(f^k(a)).$

c) Comme $g = h$ sur les éléments de la base on aura $g = h$ sur E .

d) Il en résulte que l'ensemble des endomorphismes qui commutent avec f est l'espace vectoriel engendré par les f^k , $k \in \mathbb{N}$.

9. a) On sait que $f^n = \text{id}_E$, donc si un nombre complexe λ est une valeur propre de f , alors $\lambda^n = 1$.

b) La matrice associée à f relativement à la base $(a, f(a), \dots, f^{n-1}(a))$ est
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

c) Comme toutes les valeurs propres de f sont différentes, alors f est diagonalisable.

Un vecteur propre associé à λ est donné par:
$$\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda^{n-1} \\ \lambda^{n-2} \\ \vdots \\ \lambda^2 \\ \lambda \end{pmatrix}.$$
 Donc si $\theta_j = \frac{2j\pi}{n}$, avec $j \in$

$\{0, \dots, n-1\}$, une base de vecteur propre est donnée par: (v_0, \dots, v_{n-1}) , avec $v_j =$
$$\begin{pmatrix} 1 \\ e^{i(n-1)\theta_j} \\ e^{i(n-2)\theta_j} \\ \vdots \\ e^{2i\theta_j} \\ e^{i\theta_j} \end{pmatrix}.$$

Partie III

1. a) Pour $n = 2$, $P_2(X) = \begin{vmatrix} 1 & X \\ 1 & \lambda_1 \end{vmatrix} = \lambda_1 - X$. On suppose que le résultat est vrai pour $n - 1$ et montrons le pour n .

On développe $P_n(X)$ suivant la première ligne, on aura le coefficient de X^{n-1} est $(-1)^n P_{n-1}(\lambda_1)$ qui est non nul car les λ_j sont différents deux à deux. (C'est un polynôme de degré $n - 2$ en λ_1).

b) Si $X = \lambda_j$, alors la première ligne et la $(j+1)$ -ème ligne sont égales, donc $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ sont des racines de P .

c) Il résulte que $W(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = C \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_j - \lambda_i)$, avec C une constante. $C = 1$. (Il suffit de prendre $\lambda_1 = 0$).

2. a) Si $g \in \mathcal{C}(f)$ et $x \in E_\lambda$, alors $f(g(x)) = g(f(x)) = \lambda g(x)$, donc $g(x) \in E_\lambda$.
Si g laisse stable les sous espaces propres de f . Soit λ une valeur propre de f et $v \in E_\lambda$, alors $f(g(v)) = \lambda g(v)$ et $g(f(v)) = g(\lambda v) = \lambda g(v)$. Comme il existe une base de vecteurs propres de f , alors $g \in \mathcal{C}(f)$.

b) Si E_1, \dots, E_m sont les différents sous-espaces propres de f , qui sont de dimension respectivement n_1, \dots, n_m , alors la dimension de $\mathcal{C}(f)$ est égale à $\sum_{j=1}^m n_j^2$. En particulier les valeurs propres de f sont différentes deux à deux si et seulement si $\dim \mathcal{C}(f) = n$.

3. a) \Rightarrow b): Si $\sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j f^j = 0$, alors $\sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j f^j(x) = 0$, ce qui donne que $\alpha_0 = \dots = \alpha_{n-1} = 0$.

b) \Rightarrow c): Si P est un polynôme non nul qui annule f , alors $\deg P \geq n$, donc les racines de P_f sont simples.

c) \Rightarrow d): Déjà démontré dans la question précédente.

d) \Rightarrow a): On note $x = v_1 + \dots + v_n$, avec (v_1, \dots, v_n) une base de vecteurs propres de f .

$\{x, f(x), \dots, f^{n-1}(x)\}$ est un système libre si et seulement si le déterminant $W(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ est non nul; ce qui est démontré dans la première question. Donc $\{x, f(x), \dots, f^{n-1}(x)\}$ est une base de E .

4. Il suffit de prendre la matrice dans $M_n(\mathbb{K})$ définie par: $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 2 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Le polynôme caractéristique de M est $(-1)^n(X^n - 2)$. Donc f n'est pas cyclique.