Concours Nationaux d'Entrée aux Cycle de Formations d'Ingénieurs

Session Juin 2007

Concours en Mathématiques Physique

Correction de l'Épreuve de Mathématiques I

Exercice 30

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite à valeurs réelles telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n > 0$ et la série $\sum_{n\geq 1} a_n$ est convergente. On pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \quad \text{et} \quad S = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k.$$

On désigne par $C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On considère $f \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et on définit, sur $\mathbb{R}$, la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$\begin{cases} f_0(x) &= f(x) \\ f_n(x) &= \dfrac{1}{a_n} \displaystyle\int_x^{x+a_n} f_{n-1}(t)\, dt \qquad \text{pour } n \geq 1. \end{cases}$$

1. (a) Déterminer la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si f est une application constante. 1

Si $f_0(x) = c\ \forall x \in \mathbb{R}$. Par récurrence, on montre que $f_n(x) = c$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(b) Déterminer la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $f(t) = t$. 2

Si $f_0(x) = x\ \forall x \in \mathbb{R}$.
Alors $f_1(x) = \dfrac{1}{a_1}\displaystyle\int_x^{x+a_1} t dt = x + \dfrac{a_1}{2}$.
Par récurrence on montre que $\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n(x) = x + \dfrac{S_n}{2}$.

(c) Déterminer la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $f(t) = e^t$. 2

Si $f_0(x) = e^x\ \forall x \in \mathbb{R}$.
Alors $f_1(x) = \dfrac{1}{a_1}\displaystyle\int_x^{x+a_1} e^t dt = \dfrac{1}{a_1}(e^{a_1} - 1)e^x$.
Par récurrence on montre que $\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n(x) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{a_k}(e^{a_k} - 1)\right] e^x$.

2. (a) Montrer, par récurrence sur n, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe C^n sur $\mathbb{R}$.

On a f_0 est continue sur $\mathbb{R}$.
Supposons que f_n est de classe C^n sur $\mathbb{R}$.
f_{n+1} est une primitive d'une fonction de classe C^n sur $\mathbb{R}$. Donc c'est une fonction de classe C^{n+1} sur $\mathbb{R}$.

(b) **Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on a :**

$$f_n'(x) = \frac{1}{a_n}\Big[f_{n-1}(x+a_n) - f_{n-1}(x)\Big]$$

et que

$$f_{n+1}'(x) = \frac{1}{a_{n+1}}\int_x^{x+a_{n+1}} f_n'(t)\ dt.$$

On écrit

$$f_n(x) = \frac{1}{a_n}\int_x^{x+a_n} f_{n-1}(t)\ dt = \frac{1}{a_n}\int_0^{x+a_n} f_{n-1}(t)\,dt - \frac{1}{a_n}\int_0^{x} f_{n-1}(t)\,dt.$$

Donc

$$f_n'(x) = \frac{1}{a_n}\Big[f_{n-1}(x+a_n) - f_{n-1}(x)\Big]$$

Ceci donne

$$f_{n+1}'(x) = \frac{1}{a_{n+1}}\Big[f_n(x+a_{n+1}) - f_n(x)\Big].$$

Donc

$$f_{n+1}'(x) = \frac{1}{a_{n+1}}\int_x^{x+a_{n+1}} f_n'(t)\ dt.$$

3. **Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b - S$. On pose, pour $n \geq 1$,**

$$I_n = [a, b - S_n] \qquad \text{et} \qquad H_n = \sup_{x \in I_n} |f_n'(x)|.$$

(a) **Justifier l'existence de H_n pour tout $n \geq 1$ et montrer que la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.**

Pour tout $n \geq 1$, f_n' est continue sur le segment I_n, donc sa borne supérieure existe dans $\mathbb{R}$. D'où H_n est bien définie.
On a

$$H_{n+1} = \sup_{x\in I_{n+1}} |f_{n+1}'(x)|$$

et

$$f_{n+1}'(x) = \frac{1}{a_{n+1}}\int_x^{x+a_{n+1}} f_n'(t)\ dt.$$

D'autre part $\forall\, x \in I_{n+1}$ on a $[x, x + a_{n+1}] \subset I_n$.
Ainsi, $\forall\, x \in I_{n+1}$ on a $|f_{n+1}'(x)| \leq \dfrac{1}{a_{n+1}}(x + a_{n+1} - x)H_n \leq H_n$.
D'où

$$H_{n+1} = \sup_{x\in I_{n+1}} |f_{n+1}'(x)| \leq H_n.$$

(b) **Soient $x \in [a, b - S]$ et n un entier non nul.**

i. **Montrer qu'il existe $c_n \in [x,x+a_{n+1}]$ tel que $f_{n+1}(x) = f_n(c_n)$.** (2)

On pose
$$F_n(x) = \int_0^x f_n(t)\, dt$$

F_n est une primitive de f_n et on a $f_{n+1}(x) = \dfrac{1}{a_{n+1}}[F_n(x+a_{n+1}) - F_n(x)]$.
L'application du théorème des accroissements finis à la fonction F_n sur le segment $[x,x+a_{n+1}]$, montre l'existence d'un point c_n dans cet intervalle tel que
$$F_n(x+a_{n+1}) - F_n(x) = a_{n+1} f_n(c_n).$$

Donc,
$$f_{n+1}(x) = f_n(c_n).$$

ii. **En déduire que :**
$$|f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leq H_1 a_{n+1}.$$
(2)

On a
$$|f_{n+1}(x) - f_n(x)| = |f_n(c_n) - f_n(x)|.$$

L'application du théorème des accroissements finis à la fonction f_n sur le segment $[x,c_n]$, montre l'existence d'un point y_n dans cet intervalle tel que
$$f_n(c_n) - f_n(x) = (c_n - x) f'_n(y_n).$$

D'autre part pour tout $x \in [a,b-S]$, on a $c_n \in [a,b-S_n]$ et $y_n \in [a,b-S_n]$.
Ainsi,
$$|f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leq |c_n - x| H_n \leq a_{n+1} H_n \leq H_1 a_{n+1}.$$

4. a. **Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0}(f_{n+1} - f_n)$ converge normalement sur tout compact de $\mathbb{R}$.** (2)

Pour tout compact K de $\mathbb{R}$, il existe a et $b \in \mathbb{R}$ tels que $K \subset [a,b-s]$. Ainsi, $\forall\, n \geq 1$,
$$\sup_{x\in K} |f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leq \sup_{x\in[a,b-s]} |f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leq H_1 a_{n+1}.$$

Puisque la série $\sum_{n\geq 1} a_n$ est convergente, on a alors la série $\sum_{n\geq 1} \sup_{x\in K} |f_{n+1} - f_n|$ est convergente.
Ceci montre la convergence normale de la série $\sum_{n\geq 1}(f_{n+1} - f_n)$ sur tout compact de $\mathbb{R}$.

b. **Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$. On note ϕ sa limite.** (3)

La série $\sum_{n\geq 0}(f_{n+1} - f_n)$ converge normalement et par suite uniformément sur tout compact $K \subset \mathbb{R}$.

D'où la suite des sommes partielles $\sum_{k=0}^{n}(f_{k+1}-f_k) = f_{n+1}-f_0$ converge uniformément sur tout compact $K \subset \mathbb{R}$.
Ceci montre alors que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur tout compact $K \subset \mathbb{R}$.

(c) **Montrer que ϕ est continue sur $\mathbb{R}$.** (2)

On a $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $\mathbb{R}$ et la suite (f_n) converge uniformément sur tout compact $K \subset \mathbb{R}$ vers ϕ. Donc la fonction ϕ est continue sur $\mathbb{R}$.

(d) **Donner la fonction ϕ lorsque $f(t) = t$.** (2)

On a déja montré que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n(x) = x + \frac{S_n}{2}.$$

Donc $\phi(x) = x + \frac{S}{2}$.

5. **On considère**

$$\begin{array}{rccl} T: & C(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \longrightarrow & C(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ & f & \longmapsto & T(f) = \phi. \end{array}$$

(a) **Vérifier que T est un endomorphisme.** (2)

Soient f, g deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$T(\alpha f + g) = \lim_{n \longrightarrow +\infty}(\alpha f_n + g_n) = \alpha T(f) + T(g).$$

D'où l'application T est un endomorphisme.

(b) **T est-il subjectif?** (2)

Pour tout $n \geq 1$, la fonction f_n est de classe C^1 et la suite (f_n') vérifie les mêmes propriétés vérifiées par la suite f_n. Donc la suite (f_n') converge uniformément sur tout compact inclus dans $\mathbb{R}$. Ainsi la fonction ϕ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Donc toute fonction continue qui n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ n'admet pas d'antécédent. Par conséqent T n'est pas surjectif.

Problème

Partie $\boxed{A}$ (34)

Soit V une application de classe C^∞ de $[0, +\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. Pour $\lambda > 0$, on considère les équations fonctionnelles suivantes :

$$f(x) = x + \int_0^x (x-y)(V(y)-\lambda^2)f(y)\,dy \qquad (E_\lambda)$$

$$g(x) = 1 - \int_0^x K(x,y,\lambda)g(y)\,dy \qquad (E'_\lambda)$$

avec

$$K(x,y,\lambda) = y(1-\frac{y}{x})(V(y)-\lambda^2).$$

On dira que f est une solution de (E_λ) sur $[0, +\infty[$ si et seulement si f est continue sur $[0, +\infty[$ et $\forall x \in [0, +\infty[$, f vérifie (E_λ).

On dira que g est une solution de (E'_λ) sur $[0,+\infty[$ si et seulement si g est continue sur $[0,+\infty[$ et $\forall x \in]0,+\infty[, g$ vérifie (E'_λ).

1. Soit f une solution de (E_λ) sur $[0,+\infty[$.

   (a) Montrer que f est de classe C^∞ sur $[0,+\infty[$.

   ③

   Si f est une solution de (E_λ) sur $[0,+\infty[$, alors f est continue sur $[0,+\infty[$ et on a :

   $$f(x) = x + x\int_0^x (V(y)-\lambda^2)f(y)\,dy - \int_0^x y(V(y)-\lambda^2)f(y)\,dy. \qquad (1)$$

   Donc f est de classe C^1 sur $[0,+\infty[$.
   Ainsi par récurrence on voit que f est de classe C^∞ sur $[0,+\infty[$.

   (b) Montrer que pour tout $x \geq 0$,

   $$f'(x) = 1 + \int_0^x (V(y)-\lambda^2)f(y)\,dy.$$

   ②

   En dérivant l'équation (1), on obtient

   $$f'(x) = 1 + \int_0^x (V(y)-\lambda^2)f(y)\,dy + x(V(x)-\lambda^2)f(x) - x(V(x)-\lambda^2)f(x).$$

   D'où la relation demandée.

2. Soit f une solution de (E_λ) sur $[0,+\infty[$. On définit la fonction g sur $[0,+\infty[$ par

   $$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{x} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

   Montrer que g est continue sur $[0,+\infty[$ et que c'est une solution de (E'_λ) sur $[0,+\infty[$.

   ③

   g est continue sur $]0,+\infty[$ et on a

   $$\lim_{x\longrightarrow 0} g(x) = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = f'(0) = 1 = g(0).$$

   Donc g est continue sur $[0,+\infty[$ et pour tout $x > 0$,

   $$g(x) = \frac{f(x)}{x} = 1 + \frac{1}{x}\int_0^x (x-y)(V(y)-\lambda^2)f(y)\,dy = 1 + \int_0^x K(x,y,\lambda)g(y)\,dy$$

   D'où g est solution de (E'_λ) sur $[0,+\infty[$.

3. Pour $\lambda > 0$ fixé, on définit la suite de fonctions $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[0,+\infty[$ par

   $$\psi_0(x) = 1, \ \forall x \in [0,+\infty[$$

   et pour tout $n \geq 1$

   $$\begin{cases} \psi_n(0) = 0 \\ \psi_n(x) = \displaystyle\int_0^x K(x,y,\lambda)\psi_{n-1}(y)\,dy & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, ψ_n est bien définie et est continue sur $[0,+\infty[$.

   ③

   R. P. R.
   On a ψ_0 est bien définie et continue sur $[0,+\infty[$.

Supposons que pour $n \geq 1$, ψ_n est bien définie et est continue sur $[0,+\infty[$. Montrons que ψ_{n+1} est bien définie et est continue sur $[0,+\infty[$.
Pour $x>0$, l'application $y \longmapsto K(x,y,\lambda)\psi_n(y)$ est continue sur $[0,+\infty[$. Donc ψ_{n+1} est bien définie et est continue sur $]0,+\infty[$. D'autre part

$$\lim_{x\longrightarrow 0} \psi_{n+1}(x) =$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\int_0^x y(V(y)-\lambda^2)\psi_n(y)\,dy - \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{1}{x}\int_0^x y^2(V(y)-\lambda^2)\psi_n(y)\,dy = 0 = \psi_{n+1}(0).$$

Donc ψ_{n+1} est continue sur $[0,+\infty[$.

(b) **Montrer que pour tout $x>0$ et tout $y\geq 0$ tels que $0\leq y\leq x$, on a :**

$$|K(x,y,\lambda)| \leq y\Big(|V(y)|+\lambda^2\Big).$$

\- 2

$$|K(x,y,\lambda)| = |y(1-\frac{y}{x})(V(y)-\lambda^2)|$$
$$\leq y|1-\frac{y}{x}|\Big(|V(y)|+\lambda^2\Big) \leq y\Big(|V(y)|+\lambda^2\Big).$$

(c) **Montrer, par récurrence sur n, que pour tout $n\geq 1$ et tout $x\geq 0$ on a:**

$$|\psi_n(x)| \leq \frac{(P_\lambda(x))^n}{n!}$$

où

$$P_\lambda(x) = \frac{1}{2}\lambda^2x^2 + \int_0^x y\,|V(y)|\,dy.$$

\- 3

R. P. R.
Pour $n=1$ et $x>0$, on a

$$\psi_1(x) = \int_0^x K(x,y,\lambda)\psi_0(y)\,dy = \int_0^x K(x,y,\lambda)\,dy.$$

D'après la question précédente, on obtient :

$$|\psi_1(x)| \leq \int_0^x y\Big(|V(y)|+\lambda^2\Big)\,dy \leq P_\lambda(x).$$

La formule est alors vraie pour $n=1$.
Supposons que

$$|\psi_n(x)| \leq \frac{(P_\lambda(x))^n}{n!}.$$

$$|\psi_{n+1}(x)| \leq \int_0^x |K(x,y,\lambda)||\psi_n(y)|dy \leq \int_0^x y\Big(|V(y)|+\lambda^2\Big)\frac{(P_\lambda(y))^n}{n!}\,dy$$
$$\leq \int_0^x P'_\lambda(y)\frac{(P_\lambda(y))^n}{n!}\,dy \leq \frac{(P_\lambda(x))^{n+1}}{(n+1)!}.$$

D'où le résultat est vrai pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.
L'inégalité est aussi vraie pour $x=0$.

---

4. (a) **Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} \psi_n$ converge simplement sur $[0,+\infty[$.**

(2)

Pour $x=0$, la série $\sum_{n\geq 1} \psi_n(0)$ est convergente.

Pour $x>0$, on a

$$|\psi_n(x)| \leq \frac{(P_\lambda(x))^n}{n!}.$$

Comme la série $\sum_{n\geq 0} \frac{(P_\lambda(x))^n}{n!}$ est convergente, alors pour tout $x>0$, $\sum_{n\geq 0} \psi_n(0)$ est convergente. Ainsi, la série $\sum_{n\geq 0} \psi_n$ converge simplement sur $[0,+\infty[$.

On pose pour tout $x \geq 0$

$$\psi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \psi_n(x).$$

(b) **Montrer que la fonction ψ est continue sur $[0,+\infty[$.**

(3)

Il suffit de prouver que la série $\sum_{n\geq 0} \psi_n$ converge uniformément sur tout compact inclus dans $[0,+\infty[$.

Soit $a>0$,

$$\sup_{x\in[0,a]} |\psi_n(x)| \leq \sup_{x\in[0,a]} \frac{(P_\lambda(x))^n}{n!} \leq \frac{(P_\lambda(a))^n}{n!}.$$

Donc, la série $\sum_{n\geq 0} \psi_n$ converge normalement et par suite uniformément sur tout compact inclus dans $[0,+\infty[$. Comme ψ_n est continue pour tout $n\geq 0$, alors la fonction somme ψ est continue sur $[0,+\infty[$.

(c) **Montrer que ψ est une solution de (E'_λ) sur $[0,+\infty[$.**

(4)

La fonction ψ est continue sur $[0,+\infty[$ et pour tout $x>0$, on a

$$\int_0^x K(x,y,\lambda)\psi(y)\,dy = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} K(x,y,\lambda)\psi_n(y)\,dy.$$

On a

$$\begin{aligned}\forall y\in[0,x];\ |K(x,y,\lambda)\psi_n(y)| &\leq y\Big(|V(y)|+\lambda^2\Big)\frac{(P_\lambda(y))^n}{n!}\\ &\leq x\Big(\sup_{y\in[0,x]}|V(y)|+\lambda^2\Big)\frac{(P_\lambda(x))^n}{n!}.\end{aligned}$$

Comme la série $\sum_{n\geq 0} x\Big(\sup_{y\in[0,x]}|V(y)|+\lambda^2\Big)\frac{(P_\lambda(x))^n}{n!}$ converge, alors on a la série $\sum_{n=0}^{\infty} K(x,y,\lambda)\psi_n(y)$ converge normalement et par suite uniformément sur $[0,x]$. Donc on peut permuter somme et intégrale et on obtient

$$\int_0^x K(x,y,\lambda)\psi(y)\,dy = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x K(x,y,\lambda)\psi_n(y)\,dy.$$

D'où

$$\int_0^x K(x,y,\lambda)\psi(y)\,dy = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_{n+1}(x) = -1 + \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(x).$$

Donc

$$\psi(x) = 1 + \int_0^x K(x,y,\lambda)\psi(y)\,dy.$$

---

5. **Pour $x \in [0, +\infty[$, on pose**

$$\varphi(x) = x\psi(x).$$

(a) **Montrer que φ est une solution de (E_λ) sur $[0,+\infty[$ et qu'elle est de classe C^∞ sur $[0,+\infty[$.** 3

On a φ est continue sur $[0, +\infty[$ et

$$\varphi(x) = x\psi(x) = x + x\int_0^x K(x,y,\lambda)\psi(y)\,dy = x + \int_0^x (x-y)(V(y)-\lambda^2)\varphi(y)\,dy.$$

Donc φ est une solution de (E_λ) sur $[0, +\infty[$. D'après la Question 1. (a), φ est de classe C^∞ sur $[0, +\infty[$.

(b) **Montrer que pour tout $x \geq 0$, on a :**

$$|\varphi(x)| \leq xe^{P_\lambda(x)}.$$

2

$$|\varphi(x)| = x\Big|\sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(x)\Big| \leq x\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(P_\lambda(x))^n}{n!} \leq xe^{P_\lambda(x)}.$$

(c) **En déduire, en utilisant la Question 1. (b), que pour tout $x \geq 0$,**

$$|\varphi'(x)| \leq e^{P_\lambda(x)}.$$

2

D'après la question 1. (b), on a :

$$|\varphi'(x)| \leq 1 + \Big|\int_0^x (V(y)+\lambda^2)\varphi(y)\,dy\Big| \leq 1 + \int_0^x y(|V(y)|+\lambda^2)e^{P_\lambda(y)}\,dy$$

$$\leq 1 + \int_0^x P'_\lambda(y)e^{P_\lambda(y)}\,dy \leq e^{P_\lambda(x)}.$$

(d) **Montrer que φ est une solution sur $[0, +\infty[$ de l'équation différentielle**

$$y'' - V(x)y = -\lambda^2 y.$$

2

On a

$$\varphi'(x) = 1 + \int_0^x (V(y)-\lambda^2)\varphi(y)\,dy.$$

Donc,

$$\varphi''(x) = (V(x)-\lambda^2)\varphi(x).$$

D'où φ est une solution de l'équation différentielle

$$y'' - V(x)y = -\lambda^2 y.$$

Partie $\boxed{B}$ 36

Soit V une application de $[0,+\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. On suppose que V est de classe C^∞ et intégrable sur $[0,+\infty[$. Pour $\lambda > 0$, on considère l'équation fonctionnelle suivante :

$$f(x) = e^{-i\lambda x} - \int_x^{+\infty} \frac{\sin(\lambda(x-y))}{\lambda} V(y) f(y)\, dy \qquad (F_\lambda)$$

On dira que f est une solution de (F_λ) sur $[0,+\infty[$ si et seulement si f est continue et bornée sur $[0,+\infty[$ et $\forall x \in [0,+\infty[$, f vérifie (F_λ).

1. Soit f une solution de (F_λ) sur $[0,+\infty[$.

(a) Montrer que f est de classe C^∞ sur $[0,+\infty[$.

3

R. P. R.

La fonction f est de classe C^0 par hypothèse.

Supposons que f est de classe C^n. On a :

$$f(x) = e^{-i\lambda x} - \int_x^{+\infty} \frac{\sin(\lambda x)\cos(\lambda y) - \cos(\lambda x)\sin(\lambda y)}{\lambda} V(y) f(y)\, dy.$$

Comme f est continue et bornée, alors les fonctions $y \longmapsto \cos(\lambda y)V(y)f(y)$ et $y \longmapsto \sin(\lambda y)V(y)f(y)$ sont intégrables sur $[0,+\infty[$, et on peut écrire alors,

$$f(x) = e^{-i\lambda x} - \frac{\sin(\lambda x)}{\lambda}\int_x^{+\infty} \cos(\lambda y)V(y)f(y)\, dy + \frac{\cos(\lambda x)}{\lambda}\int_x^{+\infty} \sin(\lambda y)V(y)f(y)\, dy. \qquad (2)$$

Puisque f est de classe C^n et V est de classe C^∞, alors f est de classe C^{n+1} sur $[0,+\infty[$.

En conclusion f est de classe C^n pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc f est de classe C^∞ sur $[0,+\infty[$.

(b) Montrer que pour tout $x \geq 0$,

$$f'(x) = -i\lambda e^{-i\lambda x} - \int_x^{+\infty} \cos(\lambda(y-x))V(y)f(y)dy.$$

2

En dérivant l'équation (2), on trouve :

$$f'(x) = -i\lambda e^{-i\lambda x} - \int_x^{+\infty} \cos(\lambda(y-x))V(y)f(y)dy.$$

2. Pour $\lambda > 0$ fixé, on définit la suite de fonctions $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[0,+\infty[$ par

$$\phi_0(x) = e^{-i\lambda x},\ \forall x \in [0,+\infty[$$

et pour tout $n \geq 1$ et tout $x \geq 0$,

$$\phi_n(x) = -\int_x^{+\infty} \frac{\sin(\lambda(x-y))}{\lambda} V(y)\phi_{n-1}(y)\, dy.$$

(a) **Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, ϕ_n est bien définie, bornée et continue sur $[0, +\infty[$.** ③

R. P. R.

ϕ_0 est bien définie, continue et bornée sur $[0, +\infty[$.

Supposons que pour $n \geq 1$, ϕ_{n-1} est bien définie, continue et bornée sur $[0, +\infty[$.

La fonction $y \longmapsto \dfrac{\sin(\lambda(x-y))}{\lambda} V(y)\phi_{n-1}(y)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$. D'où ϕ_n est bien définie.

En plus, on peut écrire :

$$\phi_n(x) = -\frac{\sin(\lambda x)}{\lambda}\int_x^{+\infty} \cos(\lambda y)V(y)\phi_{n-1}(y)\,dy + \frac{\cos(\lambda x)}{\lambda}\int_x^{+\infty} \sin(\lambda y)V(y)\phi_{n-1}(y)\,dy. \tag{3}$$

Donc, ϕ_n est continue sur $[0, +\infty[$.

D'autre coté puisque ϕ_{n-1}, il existe alors une constante M_n tel que $\forall y \in [0, +\infty[$, $|\phi_{n-1}(y)| \leq M_n$.

A partir de l'égalité(3), on obtient :

$$|\phi_n(x)| \leq \frac{2M_n}{\lambda}\int_0^{+\infty} |V(y)|\,dy.$$

Donc ϕ_n est bornée.

(b) **Montrer que pour tout $u \in [0, +\infty[$, $|\sin u| \leq u$.** ②

D'après le T. A. F. pour tout $u \geq 0$, il existe $c \in [0,u]$, tel que $\sin(u) = u\cos(c)$. Donc $|\sin(u)| \leq u$.

(c) **Montrer que pour tout x et tout y tels que $y \geq x \geq 0$, on a :**

$$\left|\sin(\lambda(x-y))\right| \leq \frac{2\lambda y}{1+\lambda y}.$$

②

$$\begin{aligned}(1+\lambda y)|\sin(\lambda(x-y))| &\leq |\sin(\lambda(x-y))| + \lambda y|\sin(\lambda(x-y))| \\ &\leq \lambda y + \lambda(y-x) \leq 2\lambda y.\end{aligned}$$

(d) i. **Montrer que l'application $y \longmapsto \dfrac{2y}{1+\lambda y}|V(y)|$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.** ②

La fonction $y \longmapsto \dfrac{2y}{1+\lambda y}|V(y)|$ est continue sur $[0, +\infty[$ et $\dfrac{2y}{1+\lambda y}|V(y)| \leq \dfrac{2}{\lambda}|V(y)|$. La fonction V est intégrable sur $[0,+\infty[$ donc la fonction $y \longmapsto \dfrac{2y}{1+\lambda y}|V(y)|$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

On pose pour tout $x \geq 0$,

$$Q_\lambda(x) = \int_x^{+\infty} \frac{2y}{1+\lambda y}|V(y)|\,dy.$$

ii. **Montrer que, pour tout $x \geq 0$,**

$$\lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} Q_\lambda(x) = 0.$$