REPUBLIQUE TUNISIENNE

Ministère de l'Enseignement Supérieur, de la Recherche Scientifique et de la Technologie
Concours nationaux d'entrée aux cycles de formation d'ingénieurs
Session 2007

الجمهورية التونسية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي والتكنولوجيا
المناظرات الوطنية للدخول إلى مراحل تكوين المهندسين
دورة 2007

Concours en Mathématiques et Physique
Epreuve de Mathématiques I

Durée : 4 Heures Date : 4 Juin 2007 Heure : 8 H Nb pages : 6

Barème : Exercice: 6 pts Problème: Partie A: 7pts - Partie B: 7 pts

Une grande importance sera attachée à la rigueur du raisonnement, à la clarté et au soin de la présentation. L'usage des calculatrices n'est pas autorisé.
Il est rappelé que tout résultat énoncé dans le texte peut être utilisé pour traiter la suite, même s'il n'a pu être démontré.

Exercice

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite à valeurs réelles telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n > 0$ et la série $\sum_{n\geq 1} a_n$ est convergente. On pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \qquad \text{et} \qquad S = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k.$$

On désigne par $C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On considère $f \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et on définit, sur $\mathbb{R}$, la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$\begin{cases} f_0(x) &= f(x) \\ f_n(x) &= \dfrac{1}{a_n} \displaystyle\int_x^{x+a_n} f_{n-1}(t)\,dt \qquad \text{pour } n \geq 1. \end{cases}$$

1. (a) Déterminer la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si f est une application constante.
   (b) Déterminer la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $f(t) = t$.
   (c) Déterminer la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $f(t) = e^t$.
2. (a) Montrer, par récurrence sur n, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe C^n sur $\mathbb{R}$.

(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f_n'(x) = \frac{1}{a_n}\Big[f_{n-1}(x+a_n) - f_{n-1}(x)\Big]$$

et que

$$f_{n+1}'(x) = \frac{1}{a_{n+1}}\int_x^{x+a_{n+1}} f_n'(t)\,dt.$$

3. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b - S$. On pose, pour $n \geq 1$,

$$I_n = [a, b - S_n] \qquad \text{et} \qquad H_n = \sup_{x \in I_n} |f_n'(x)|.$$

   (a) Justifier l'existence de H_n pour tout $n \geq 1$ et montrer que la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

   (b) Soient $x \in [a, b-S]$ et n un entier non nul.

      i. Montrer qu'il existe $c_n \in [x, x + a_{n+1}]$ tel que $f_{n+1}(x) = f_n(c_n)$.

      ii. En déduire que :
$$|f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leq H_1 a_{n+1}.$$

4. (a) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0}(f_{n+1} - f_n)$ converge normalement sur tout compact de $\mathbb{R}$.

   (b) Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$. On note ϕ sa limite.

   (c) Montrer que ϕ est continue sur $\mathbb{R}$.

   (d) Donner la fonction ϕ lorsque $f(t) = t$.

5. On considère

$$\begin{array}{rccc} T: & C(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \longrightarrow & C(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ & f & \longmapsto & T(f) = \phi. \end{array}$$

   (a) Vérifier que T est un endomorphisme.

   (b) T est-il surjectif ?

Problème

Partie $\boxed{A}$

Soit V une application de classe C^∞ de $[0, +\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. Pour $\lambda > 0$, on considère les équations fonctionnelles suivantes :

$$f(x) = x + \int_0^x (x-y)(V(y) - \lambda^2)f(y)\,dy \qquad (E_\lambda)$$

$$g(x) = 1 + \int_0^x K(x,y,\lambda)g(y)\,dy \qquad (E'_\lambda)$$

avec

$$K(x,y,\lambda) = y(1-\frac{y}{x})(V(y)-\lambda^2).$$

On dira que f est une solution de (E_λ) sur $[0,+\infty[$ si et seulement si f est continue sur $[0,+\infty[$ et $\forall\, x \in [0,+\infty[$, f vérifie (E_λ).

On dira que g est une solution de (E'_λ) sur $[0,+\infty[$ si et seulement si g est continue sur $[0,+\infty[$ et $\forall\, x \in]0,+\infty[, g$ vérifie (E'_λ).

1. Soit f une solution de (E_λ) sur $[0,+\infty[$.

   (a) Montrer que f est de classe C^∞ sur $[0,+\infty[$.

   (b) Montrer que pour tout $x \geq 0$,

   $$f'(x) = 1 + \int_0^x (V(y)-\lambda^2)f(y)\,dy.$$

2. Soit f une solution de (E_λ) sur $[0,+\infty[$. On définit la fonction g sur $[0,+\infty[$ par

   $$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{x} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

   Montrer que g est continue sur $[0,+\infty[$ et que c'est une solution de (E'_λ) sur $[0,+\infty[$.

3. Pour $\lambda > 0$ fixé, on définit la suite de fonctions $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[0,+\infty[$ par

   $$\psi_0(x) = 1, \ \ \forall\, x \in [0,+\infty[$$

   et pour tout $n \geq 1$

   $$\begin{cases} \psi_n(0) = 0 \\ \psi_n(x) = \displaystyle\int_0^x K(x,y,\lambda)\psi_{n-1}(y)\,dy \ \ \text{si } x > 0. \end{cases}$$

   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, ψ_n est bien définie et est continue sur $[0,+\infty[$.

   (b) Montrer que pour tout $x > 0$ et tout $y \geq 0$ tels que $0 \leq y \leq x$, on a :

   $$|K(x,y,\lambda)| \leq y\Big(|V(y)| + \lambda^2\Big).$$

   (c) Montrer, par récurrence sur n, que pour tout $n \geq 1$ et tout $x \geq 0$ on a :

   $$|\psi_n(x)| \leq \frac{(P_\lambda(x))^n}{n!}$$

   où

   $$P_\lambda(x) = \frac{1}{2}\lambda^2 x^2 + \int_0^x y\,|V(y)|\,dy.$$

4. (a) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} \psi_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$.

   On pose pour tout $x \geq 0$
$$\psi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \psi_n(x).$$

   (b) Montrer que la fonction ψ est continue sur $[0, +\infty[$.

   (c) Montrer que ψ est une solution de (E'_λ) sur $[0, +\infty[$.

5. Pour $x \in [0, +\infty[$, on pose
$$\varphi(x) = x\psi(x).$$

   (a) Montrer que φ est une solution de (E_λ) sur $[0, +\infty[$ et qu'elle est de classe C^∞ sur $[0, +\infty[$.

   (b) Montrer que pour tout $x \geq 0$, on a :
$$|\varphi(x)| \leq xe^{P_\lambda(x)}.$$

   (c) En déduire, en utilisant la Question 1. (b), que pour tout $x \geq 0$,
$$|\varphi'(x)| \leq e^{P_\lambda(x)}.$$

   (d) Montrer que φ est une solution sur $[0, +\infty[$ de l'équation différentielle
$$y'' - V(x)y = -\lambda^2 y.$$

Partie $\boxed{B}$

Soit V une application de $[0, +\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. On suppose que V est de classe C^∞ et intégrable sur $[0, +\infty[$. Pour $\lambda > 0$, on considère l'équation fonctionnelle suivante :
$$f(x) = e^{-i\lambda x} - \int_x^{+\infty} \frac{\sin(\lambda(x-y))}{\lambda} V(y)f(y)\,dy \qquad (F_\lambda)$$

On dira que f est une solution de (F_λ) sur $[0, +\infty[$ si et seulement si f est continue et bornée sur $[0, +\infty[$ et $\forall x \in [0, +\infty[$, f vérifie (F_λ).

1. Soit f une solution de (F_λ) sur $[0, +\infty[$.

   (a) Montrer que f est de classe C^∞ sur $[0, +\infty[$.

   (b) Montrer que pour tout $x \geq 0$,
$$f'(x) = -i\lambda e^{-i\lambda x} - \int_x^{+\infty} \cos(\lambda(y-x))V(y)f(y)dy.$$

2. Pour $\lambda > 0$ fixé, on définit la suite de fonctions $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[0, +\infty[$ par

$$\phi_0(x) = e^{-i\lambda x}, \ \forall x \in [0, +\infty[$$

et pour tout $n \geq 1$ et tout $x \geq 0$,

$$\phi_n(x) = -\int_x^{+\infty} \frac{\sin(\lambda(x-y))}{\lambda} V(y)\phi_{n-1}(y)\, dy.$$

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, ϕ_n est bien définie, bornée et continue sur $[0, +\infty[$.

(b) Montrer que pour tout $u \in [0, +\infty[$, $|\sin u| \leq u$.

(c) Montrer que pour tout x et tout y tels que $y \geq x \geq 0$, on a :

$$\Big|\sin(\lambda(x-y))\Big| \leq \frac{2\lambda y}{1+\lambda y}.$$

(d) i. Montrer que l'application $y \longmapsto \dfrac{2y}{1+\lambda y}|V(y)|$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

On pose pour tout $x \geq 0$,

$$Q_\lambda(x) = \int_x^{+\infty} \frac{2y}{1+\lambda y}|V(y)|\, dy.$$

ii. Montrer que, pour tout $x \geq 0$,

$$\lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} Q_\lambda(x) = 0.$$

(e) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \geq 0$, on a :

$$|\phi_n(x)| \leq \frac{(Q_\lambda(x))^n}{n!}.$$

3. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} \phi_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$.

On pose pour tout $x \geq 0$

$$\Psi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \phi_n(x).$$

4. Montrer que la fonction Ψ est continue sur $[0, +\infty[$.

5. Montrer que Ψ est une solution de (F_λ) sur $[0, +\infty[$ et qu'elle est de classe C^∞ sur $[0, +\infty[$.

6. Montrer que pour tout $x \geq 0$, on a :

$$|\Psi(x) - e^{-i\lambda x}| \leq e^{Q_\lambda(x)} - 1$$

et

$$|\Psi'(x) + i\lambda e^{-i\lambda x}| \leq e^{Q_\lambda(x)} \int_x^{+\infty} |V(y)|\, dy.$$

7. Montrer que Ψ est une solution sur $[0, +\infty[$ de l'équation différentielle

$$y'' - V(x)y = -\lambda^2 y.$$

8. Pour tout $\lambda > 0$ et tout $x \geq 0$, on pose

$$H(\lambda, x) = \varphi'(x)\Psi(x) - \Psi'(x)\varphi(x)$$

où φ est la fonction définie à la Question 5. de la Partie A et Ψ est la fonction définie à la Question 3. de la Partie B.

   (a) Montrer que pour tout $x \in [0, +\infty[$,

$$H(\lambda, x) = H(\lambda, 0).$$

   (b) Montrer que pour tout $\lambda > 0$, on a :

$$|H(\lambda, 0) - 1| \leq e^{Q_\lambda(0)} - 1.$$

   (c) Montrer que

$$\lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} H(\lambda, 0) = 1.$$