REPUBLIQUE TUNISIENNE
Ministère de l'Enseignement
Supérieur, de la Recherche Scientifique et
de la Technologie
**Concours nationaux d'entrée aux cycles
de formation d'ingénieurs
Session 2007**

الجمهورية التونسية
وزارة التعليم العالي
والبحث العلمي والتكنولوجيا

المناظرات الوطنية للدخول
إلى مراحل تكوين المهندسين
دورة 2007

Concours Mathématiques et Physique, Physique et Chimie, Biologie et Géologie &Technologie
Epreuve d'Informatique

Date : Mardi 05 Juin 2007	**Heure : 15 H**	**Durée : 2 H**	**Nbre pages : 6**

Barème : EXERCICE 1 : 3 points, EXERCICE 2 : 4 points, PROBLEME : 13 points

DOCUMENTS NON AUTORISES
L'USAGE DES CALCULATRICES EST INTERDIT

EXERCICE 1 (3 points)

Soit la fonction f définie par : $f(x)=\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,dt$.

Donner les instructions Maple permettant de :

1. définir f ;
2. vérifier la parité de f;
3. calculer L, $L=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$;
4. calculer g , la fonction dérivée de f ;
5. calculer DV, le développement limitée de f au voisinage de 0 d'ordre 10 ;
6. calculer DA, le développement asymptotique de f ;

Soit H l'expression en x définie par $H=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}e^{x^2}f(x)$

7. Définir l'expression H puis h , h étant la transformation de H en une fonction ;
8. Vérifier que $h(x)$ satisfait l'équation différentielle : $h'(x)-2xh(x)=1$.
   indication : poser $z=h'(x)-2xh(x)$ et la simplifier.

EXERCICE 2 (4 points)

Soit A la matrice définie par : $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -2 & 5 & 3 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix}$.

Donner les instructions Maple permettant de :

1. définir la matrice A ;
2. calculer ***DT,*** le déterminant de A ;
3. calculer ***NOY*** **,** le noyau de A ;
4. calculer ***IM,*** l'image de A ;
5. déterminer ***POL***, le polynôme caractéristique de A ;
6. déterminer ***VALP1***, les valeurs propres de A par résolution de POL ;
7. déterminer ***VALP2,*** les valeurs propres de A par utilisation de la commande Maple appropriée ;
8. affecter à ***VECTP***, par la commande Maple appropriée**,** une séquence de listes contenant entre autre les vecteurs propres de A.
   Cette commande donne le résultat Maple suivant :
   VECTP := [0, 1,{ [-1,-1,1] }] , [2, 1, { [0,-1, 1] }] , [1, 1,{ [2, 1, 0] }]
   Expliquer ce résultat.
9. extraire à partir de ***VECTP***, les vecteurs propres en utilisant la commande **op**. Ces vecteurs sont notés respectivement ***V1***, ***V2*** et ***V3*** ;
10. construire la matrice ***P*** de passage par concaténation des vecteurs ***V1***, ***V2*** et ***V3*** ;
11. calculer ***INVP*** la matrice inverse de ***P*** ;
12. déduire à partir des valeurs propres de A, la matrice diagonale ***d ;***
13. calculer en utilisant la commande map la matrice $dn = d^n$;
14. calculer An, $An = A^n$ (on rappelle que $A^n = P\, d^n P^{-1}$).

PROBLEME

PARTIE A : ALGORITHMIQUE (7 points)

On désire construire une bibliothèque de fonctions et de procédures permettant la recherche approchée d'un zéro d'une fonction dans un intervalle fixé, par plusieurs méthodes avec une précision de calcul ε.

Description des méthodes

- ***Méthode des dichotomies***

Soit une fonction f donnée. En supposant que l'on connaisse un intervalle $[a,b]$ sur lequel la fonction change de signe, c'est à dire que $f(a)f(b) < 0$. Si la fonction f est continue et strictement monotone, nous savons que cet intervalle contient alors une racine α de f.

Découpons cet intervalle en deux en posant : $c = \dfrac{(a+b)}{2}$. Trois cas sont possibles :

- Si $f(c)$ est du signe de $f(a)$, la racine appartient à l'intervalle $[c,b]$,
- Si $f(c)$ est du signe opposé à $f(a)$, la racine appartient à l'intervalle $[a,c]$,
- Si $f(c) = 0$, la racine de f est c.

Il suffit de répéter le processus jusqu'à ce que la précision ε demandée soit atteinte. Cette précision est atteinte lorsque $|f(c)| \leq \varepsilon$.

- ***Méthode de Newton***

La méthode de Newton consiste à calculer une suite de valeurs (x_n) convergeant vers la racine α de l'équation $f(x) = 0$. Cette méthode est applicable à la double condition : la fonction doit être dérivable et la dérivée ne doit pas s'annuler au voisinage de α.

Partant d'un point x_0, on calcule successivement :

$$x_1 = x_0 - \frac{(f(x_0))}{(f'(x_0))}$$

$$x_2 = x_1 - \frac{(f(x_1))}{(f'(x_1))}$$

.

.

$$x_n = x_{n-1} - \frac{(f(x_{n-1}))}{(f'(x_{n-1}))}$$

Le processus s'arrête lorsque la différence $|x_n - x_{n-1}| \leq \varepsilon$, x_n est alors une valeur approchée de α.

- ***Méthode d'approximation successive***

En posant par exemple $g(x) = x + f(x)$, l'équation $f(x) = 0$ peut s'écrire sous la forme $x = g(x)$.

En supposant que la solution appartienne à un intervalle $[a,b]$ fixé et que $|g'(x)| < 1 \; \forall x \in [a,b]$, alors la suite définie par $x_{n+1} = g(x_n) \; \forall \; x_0 \in [a,b]$ converge vers la racine α quand n tend vers l'infini.

Le processus s'arrête lorsque la différence $|x_n - x_{n-1}| \leq \varepsilon$, x_n est alors une valeur approchée de α.

- ***Méthode de Regula Falsi***

On peut améliorer la convergence de la méthode des dichotomies.

On définit l'abscisse c comme intersection de l'axe des x et de la corde joignant les points M_a *et* M_b tels que $M_a = (a, f(a))$ et $M_b = (b, f(b))$

$$c = \frac{(af(b) - bf(a))}{(f(b) - f(a))}$$

- Si $f(c) = 0$, on a évidemment trouvé une racine de f.
- Si $f(c)$ est du signe de $f(a)$, la racine appartient à l'intervalle $[c,b]$
- Si $f(c)$ est du signe opposé à $f(a)$, la racine appartient à l'intervalle $[a,c]$.

Il suffit de répéter le processus jusqu'à ce que la précision ε demandée soit atteinte. Cette précision est atteinte lorsque $|f(c)| \leq \varepsilon$.

Travail demandé

NB : Pour toutes les questions, les vérifications de continuité, de dérivabilité et de monotonie des fonctions ne sont pas demandées.

1. On souhaite chercher une racine de l'équation **f** définie par *f(x)= tg(x)-x.*
   Ecrire une fonction algorithmique ***f*** définissant la fonction **f**. (pour le calcul de la tangente, vous pouvez utiliser la fonction algorithmique **tan** qu'on suppose prédéfinie).

2. L'utilisation de certaines méthodes nécessite le calcul de la fonction dérivée. Une approximation numérique de la dérivée d'une fonction *f* en un point x est donnée par :

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}.$$

   On prendra pour les calculs ***h*** constante égale à 0.001.
   Ecrire une fonction algorithmique ***fprime*** permettant de calculer puis retourner la dérivée de *f* en un point x donné.

Dans la suite, les variables **a, b, eps, xn , kmax, nb** et **ibf** désignent :

a et **b** : les extrémités de l'intervalle où se trouve la racine de f que l'on cherche,
eps : la précision ε voulue,
xn : approximation de la racine recherchée,
kmax : le nombre maximum d'itérations que l'on accepte d'effectuer,
nb : nombre d'itérations réellement effectuées,
ibf : indicateur de bonne fin. Si le résultat de recherche de la racine est obtenu avec la précision voulue avant que l'on ait effectué les **kmax** itérations, **ibf=0** et **xn** contient l'approximation de la racine recherchée ; sinon **ibf=1.**

Chacune des procédures de calcul de zéro d'une fonction f utilise **a, b, eps** et **kmax** comme paramètres données (en entrée) et **xn, nb** et **ibf** comme paramètres résultats (en sortie) ; ces derniers sont précédés par **var** dans les entêtes des différentes procédures.

3. Ecrire une procédure ***dicho*** qui permet de calculer, par la méthode des dichotomies, une valeur approximative **xn** de la racine α pour laquelle la fonction f s'annule.

   L'entête de la procédure est :

   procédure dicho (a, b, eps : réel , kmax : entier , var xn : réel , var nb :entier, var ibf : entier)

4. Ecrire une procédure ***newton*** qui permet de calculer, par la méthode de Newton, une valeur approximative **xn** de la racine α. On prendra comme point de départ la valeur $x_0 = \frac{a+b}{2}$.

   L'entête de la procédure est :

   procédure newton (a, b, eps : réel , kmax : entier , var xn : réel , var nb: entier, var ibf : entier)

5. L'utilisation de la méthode d'approximations successives nécessite la réécriture de l'équation $f(x)=0$ sous la forme $x=g(x)$.

   1 Ecrire une fonction algorithmique ***g*** définissant la fonction $g(x)=x+f(x)$

   2 Ecrire une procédure ***success*** qui permet de calculer, par la méthode

d'approximations successives, une valeur approximative **xn** de la racine α pour laquelle la fonction f s'annule en utilisant la fonction g définie en 5.1. On prendra comme point de départ la valeur $x_0 = \dfrac{a+b}{2}$.

L'entête de la procédure est :

procédure success (a, b, eps : réel , kmax : entier , var xn : réel , var nb: entier, var ibf : entier)

Remarque : On demande de vérifier, à chaque itération, la condition de convergence $|g'(x)| < 1 \ \forall x \in [a,b]$. Il est donc nécessaire d'écrire une fonction ***gprime*** dérivée de ***g***.

$$g'(x) = \frac{g(x+h) - g(x-h)}{2h}$$

On prendra pour les calculs ***h*** constante égale à 0.001.

6. Ecrire une procédure ***falsi*** qui permet de calculer, par la méthode de Regula Falsi, une valeur approximative **xn** de la racine α pour laquelle la fonction f s'annule. L'entête de la procédure est :

   procédure falsi (a, b, eps : réel , kmax : entier , var xn : réel , var nb :entier, var ibf : entier)

PARTIE B : PROGRAMMATION MAPLE (6 points)

On suppose dans cette partie que les méthodes de recherche approchée d'un zéro d'une fonction (partie A) sont programmées en Maple sous forme de procédures. Les paramètres de chacune de ces procédures sont **a**, **b**, **eps** et **kmax** et chacune retourne un vecteur résultat contenant dans l'ordre **nb**, **xn** et **ibf**. On rappelle que toutes ces variables sont décrites dans la partie A.

7. On veut conserver les résultats d'exécution de ces fonctions dans un tableau. Pour cela, on associe à chacune des méthodes un numéro tel que :
   - **1** : pour la méthode des dichotomies,
   - **2** : pour la méthode de Newton,
   - **3** : pour la méthode d'approximations successives,
   - **4** : pour la méthode de Regula Falsi.

   Ecrire en Maple une procédure ***recherche*** ayant comme arguments **a**, **b**, **eps** et **kmax** et qui retourne un tableau **TAB** (une matrice résultat) contenant un nombre de lignes égal au nombre de méthodes de recherche. Chacune de ces lignes contient dans l'ordre : le numéro de la méthode et les valeurs **nb**, **xn** et **ibf**. Ces valeurs seront extraites à partir du vecteur résultat obtenu par appel de la procédure Maple associée à la méthode.

8. On désire réorganiser le contenu du tableau **TAB** obtenu par l'appel de la procédure ***recherche*** de la question 7 de telle sorte que les lignes dont **ibf** vaut 0 (c'est-à-dire recherche fructueuse) seront placées en début du tableau. Ces lignes seront par la suite triées selon la valeur associée à **nb** dans **TAB**, de la plus petite vers la plus grande.

   Ecrire une procédure ***organisation*** ayant comme arguments le tableau **TAB** et **nl** (**nl** étant le nombre de ligne du tableau **TAB**, **nl** est un entier positif >1) et qui permet de retourner le tableau réorganisé selon le principe présenté ci-dessus. (Vous pouvez utiliser la commande Maple swaprow. A :=swaprow(A, i, j) permet de permuter les lignes i et j d'une matrice A).

   On demande d'utiliser, pour la programmation du tri, la méthode dite par sélection et qui consiste dans une première étape à chercher la valeur la plus petite associée à **nb** dans la partie du tableau à trier et à permuter la ligne correspondante avec la première ligne. L'étape suivante consiste à trier le tableau diminué de sa première ligne c'est-à-dire de chercher dans le tableau diminué la valeur associée à **nb** la plus faible puis de permuter la ligne correspondante avec la première ligne du tableau diminué. Cette même opération sera répétée pour le reste du tableau jusqu'à ce que le tri souhaité soit effectué.

9. En supposant que les valeurs de **a**, **b**, **eps** et **kmax** sont déjà saisies, écrire les instructions Maple permettant d'afficher le nom de la méthode (si elle existe) ayant effectué le minimum d'itérations pour le calcul du zéro de f ainsi que le résultat de la recherche.