REPUBLIQUE TUNISIENNE
Ministère de l'Enseignement Supérieur

Signature des surveillants

Ne rien écrire ici

Concours Nationaux d'Entrée aux Cycles de Formation d'Ingénieurs

Session : .Juin .2005 …. **Concours** : …MP – PC...

Epreuve : ….STI……

N° de la feuille	Total des doubles Feuilles remises

Nom : ………………………………… **Prénom (s)** : ……………………….

Institution d'origine : ……………………………………………………………

Identification : **Série** :

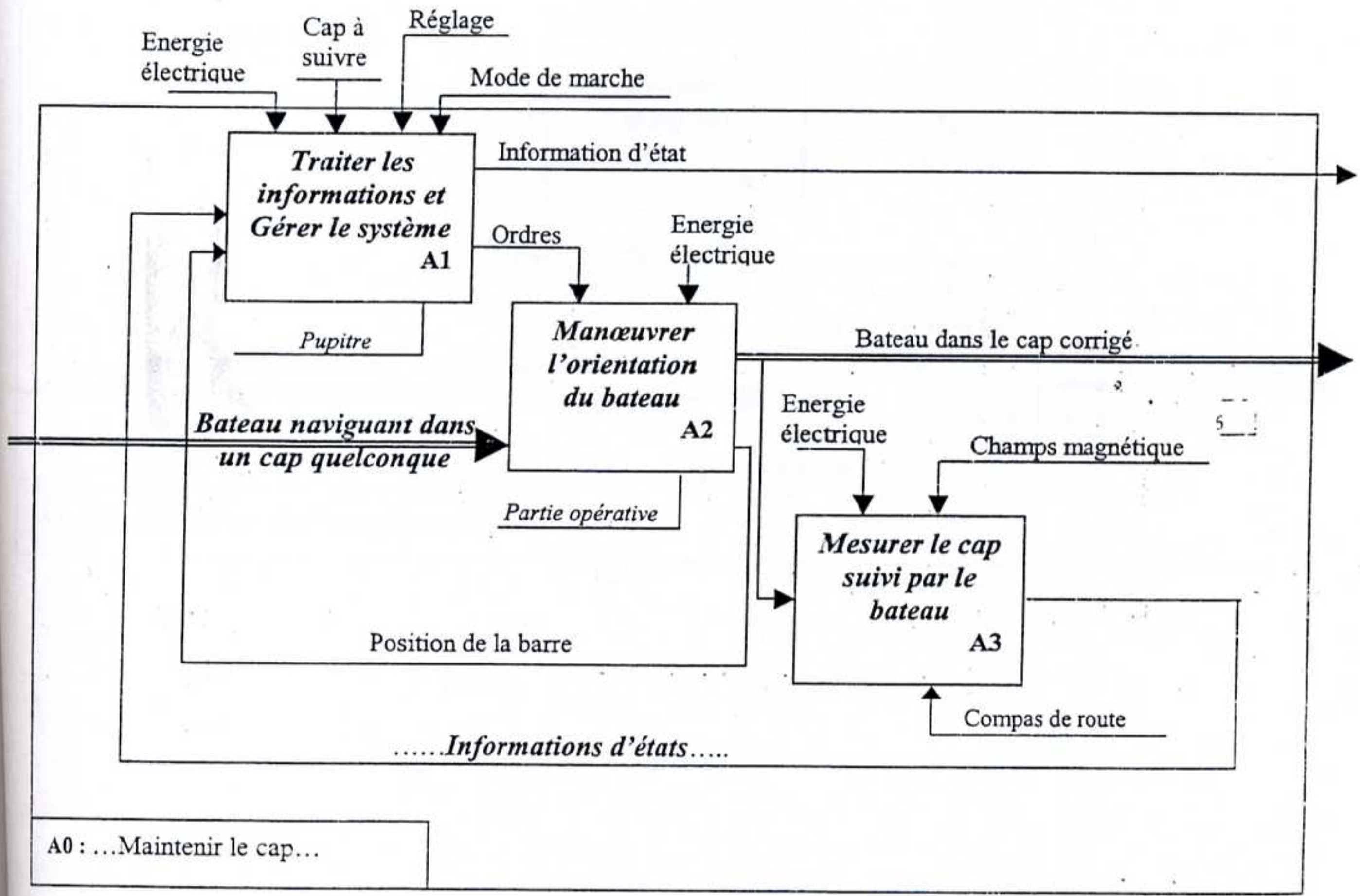
N° de la feuille	Total des doubles Feuilles remises

Document Réponse DR1

Partie A : TECHNOLOGIE DE CONCEPTION

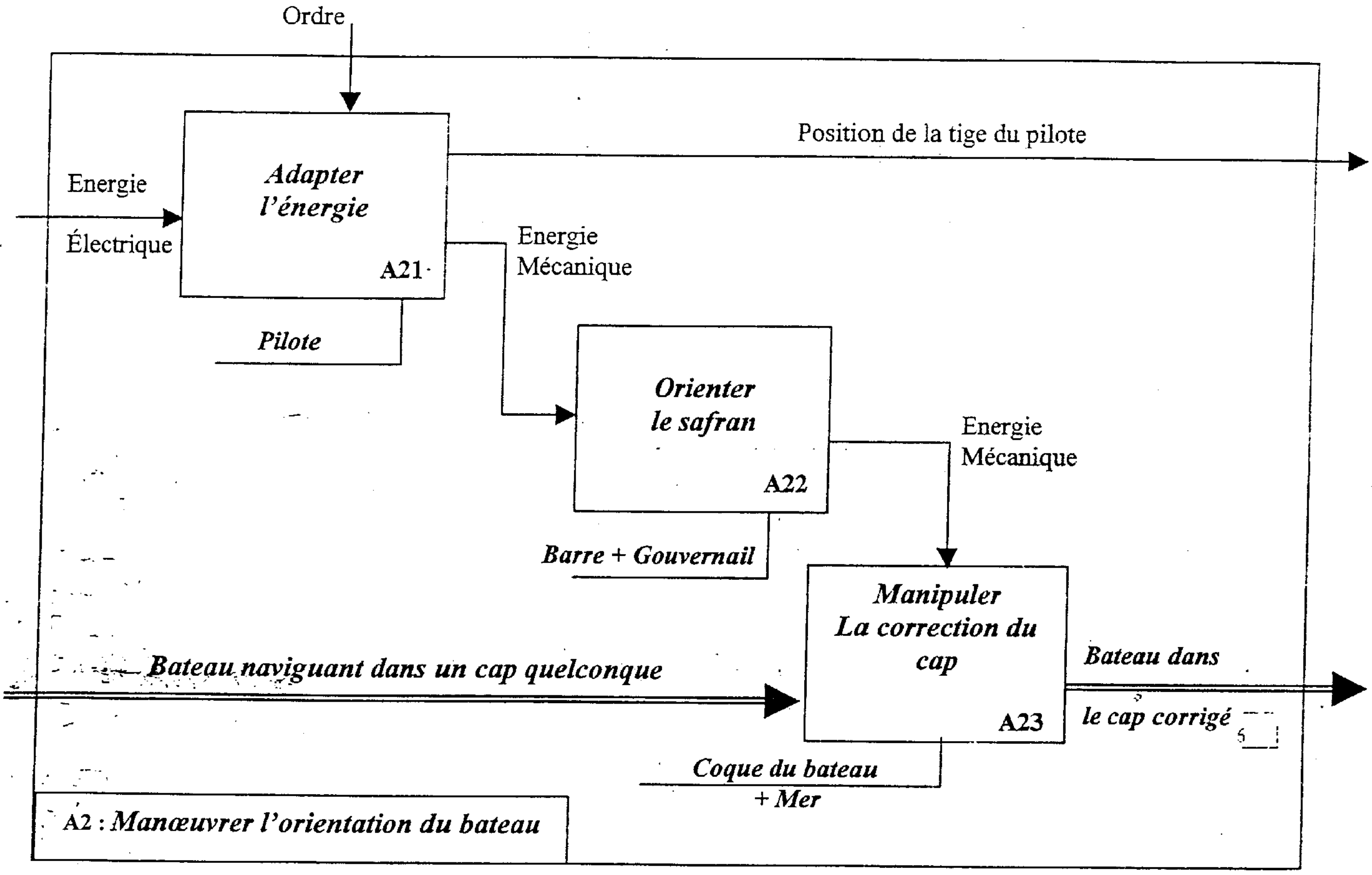
A-I- Analyse fonctionnelle du pilote automatique

A-I-1. Actigramme niveau A0 : Compléter les éléments manquants.



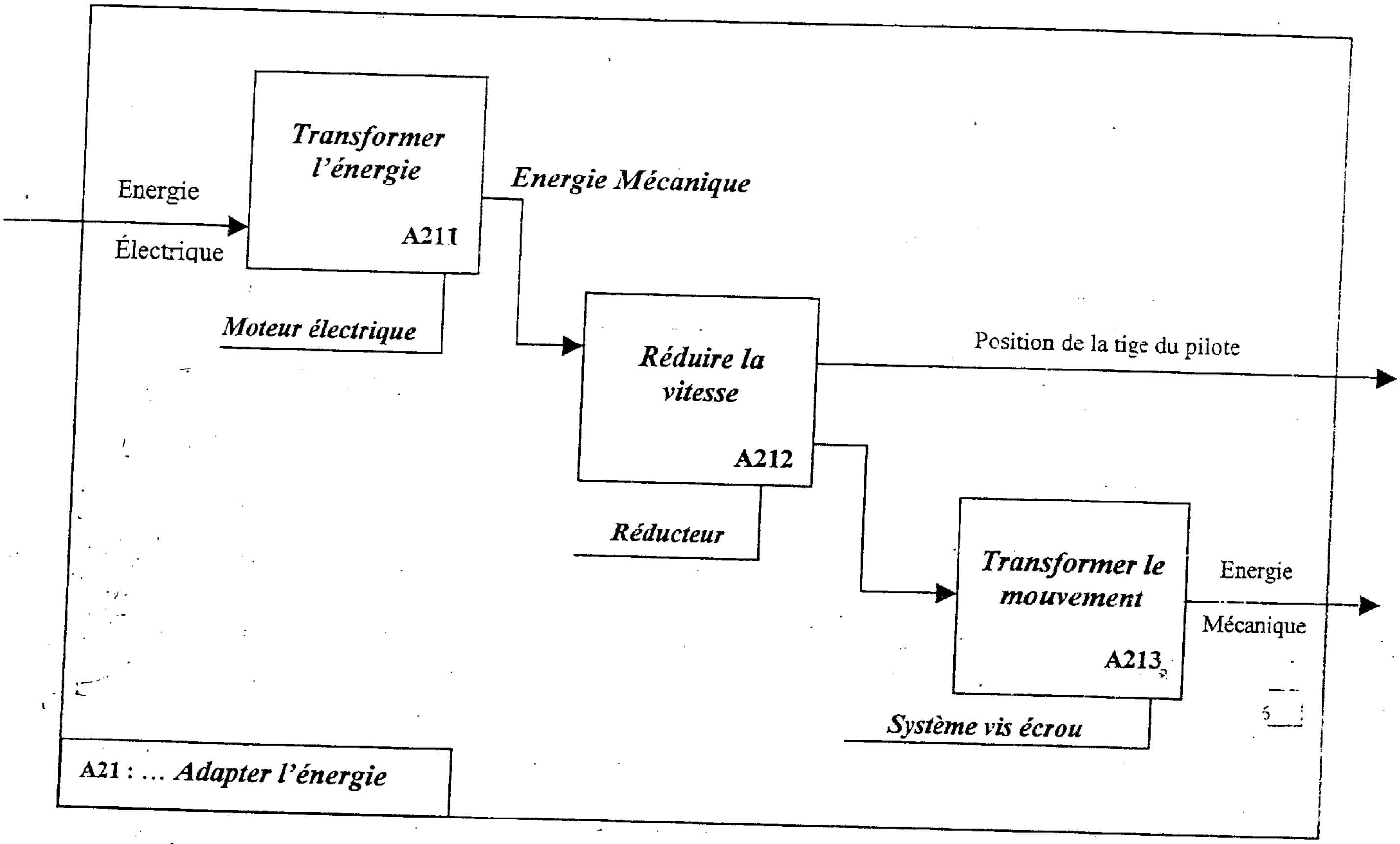
NE RIEN ECRIRE ICI

A-I-2. Actigramme niveau A2 : Compléter les éléments manquants



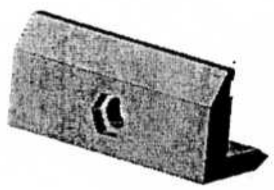
NE RIEN ECRIRE ICI

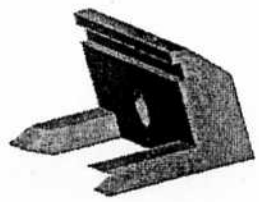
A-I-3. Actigramme niveau A21 : Compléter les éléments manquants

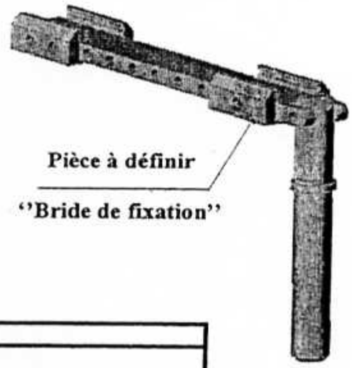


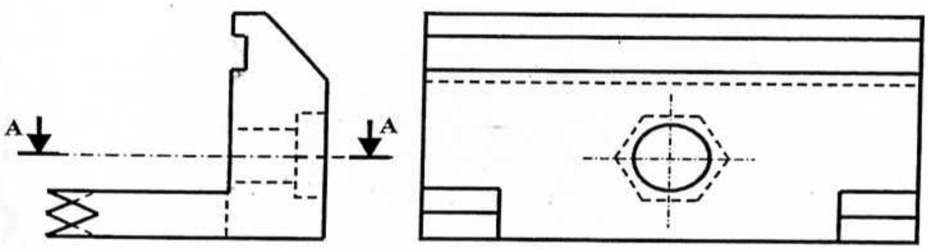
NE RIEN ECRIRE ICI

A-II- Etude graphique :

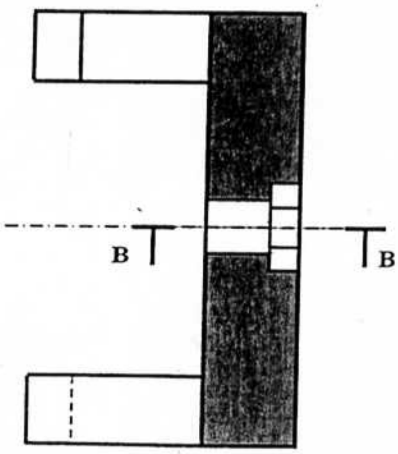




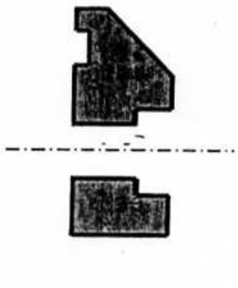




A-A



B-B



NE RIEN ECRIRE ICI

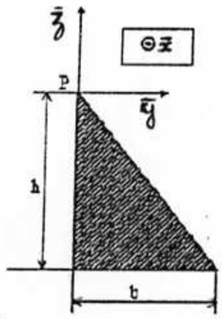
B-I. Géométrie des masses

B-I-1. Déterminer la position du centre d'inertie G de (S) dans le repère $\Re(P,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$.

- Système de coordonnées : cartésien ; Paramètres (x=0, y, z).
- $dm = \frac{m}{S} dS$; avec $S = \frac{hb}{2}$ et $dS = dy\,dz \Rightarrow \mathbf{dm = \frac{2m}{hb} dy\,dz}$.
- $y \in [0, b]$ et $z \in [-h, \frac{-h}{b} y]$.

Les calculs ne sont pas très difficiles à mener. Les résultats obtenus sont :

$$\left.\begin{array}{l} \blacktriangleright\ x_G = 0 \\ \blacktriangleright\ y_G = \frac{1}{m}\int_{(S)} y\,dm = \frac{2}{hb}\int_0^b \left[\int_{-h}^{\frac{-h}{b}y} dz\right] y\,dy = \frac{b}{3} \\ \blacktriangleright\ z_G = \frac{1}{m}\int_{(S)} z\,dm = \frac{2}{hb}\int_0^b \left[\int_{-h}^{\frac{-h}{b}y} z\,dz\right] dy = \frac{-2h}{3} \end{array}\right\}$$



$$\boxed{G\left(0,\ \frac{b}{3},\ \frac{-2h}{3}\right)_{\Re(P,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}}$$

<u>*N.B :*</u> Les calculs sont « plus faciles » si on utilise les domaines de variations des paramètres suivant : $\boxed{y \in [0, \frac{-b}{h} z] \text{ et } z \in [-h, 0]}$. Les résultats obtenus sont identiques aux précédents.

B-I-2. Déterminer la matrice d'inertie de (S) : $[I_P(S)]_{\mathcal{B}}$, au point P, exprimée dans la base $\mathcal{B}(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$.

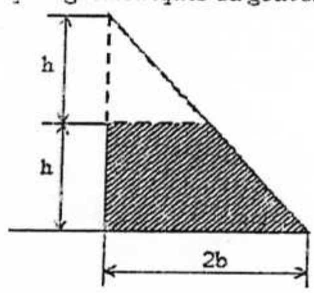
- Le plans $(P, \vec{y}, \vec{z})$ est le seul plan de symétrie ⇒ E=F=0.
- $x = 0 \Rightarrow A = \int_{(S)} (y^2 + z^2)\,dm = B + C$
- $$\left.\begin{array}{l} \blacktriangleright\ B = \int_{(S)} z^2\,dm = \frac{2m}{hb}\int_0^b \left[\int_{-h}^{\frac{-h}{b}y} z^2\,dz\right] dy = \frac{mh^2}{2} \\ \blacktriangleright\ C = \int_{(S)} y^2\,dm = \frac{2m}{hb}\int_0^b \left[\int_{-h}^{\frac{-h}{b}y} dz\right] y^2\,dy = \frac{mb^2}{6} \end{array}\right\} \Rightarrow A = B + C = \frac{mh^2}{2} + \frac{mb^2}{6}$$
- $\blacktriangleright\ D = \int_{(S)} yz\,dm = \frac{2m}{hb}\int_0^b \left[\int_{-h}^{\frac{-h}{b}y} z\,dz\right] y\,dy = -\frac{mhb}{4}$

NE RIEN ECRIRE ICI

$$\boxed{[I_P(S)]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & -D \\ 0 & -D & C \end{bmatrix}_{\mathscr{B}}}$$

B-I-3. Montrer que le centre d'inertie G_6 du gouvernail est défini par : $\overline{HG_6} = b_6\vec{y}_6 - h_6\vec{z}_0$
Exprimer les constantes b_6 et h_6 en fonction des caractéristiques géométriques du gouvernail.

$\left.\begin{array}{l} S_{61} : \text{Grand triangle } (2h \times 2b) \\ S_{62} : \text{Petit triangle } (h \times b) \end{array}\right\}$ de même sommet H



$m_6 = \sigma S_6$ avec: $S_6 = \dfrac{(2b+b)\times h}{2} = \dfrac{3bh}{2}$: Trapèze

$m_{61} = \sigma S_{61}$ avec: $S_{61} = \dfrac{2h \times 2b}{2} = 2bh$: Grand triangle

$m_{62} = \sigma S_{62}$ avec: $S_{62} = \dfrac{h \times b}{2}$: Petit triangle

$$\Rightarrow m_{61} = \frac{4}{3}m_6 \text{ et } m_{62} = \frac{1}{3}m_6$$

G_6 est donné par la formule du barycentre: $m_6\overline{HG_6} = m_{61}\overline{HG_{61}} - m_{62}\overline{HG_{62}}$

Avec : $\overline{HG_{61}}\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{2b}{3} & \dfrac{-4h}{3} \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_6}$ et $\overline{HG_{62}}\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{b}{3} & \dfrac{-2h}{3} \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_6}$

$$\boxed{\overline{HG_6}\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{7b}{9} & \dfrac{-14h}{9} \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_6} \Rightarrow \begin{cases} b_6 = \dfrac{7b}{9} \\ h_6 = \dfrac{14h}{9} \end{cases}}$$

B-I-4. Montrer que la matrice d'inertie de (6) : $[I_H(6)]_{\mathscr{B}6}$, au point H, dans la base $\mathscr{B}_6$ est de la forme : $[I_H(6)]_{\mathscr{B}6} = \begin{bmatrix} A_6 & 0 & 0 \\ 0 & B_6 & -D_6 \\ 0 & -D_6 & C_6 \end{bmatrix}_{\mathscr{B}6}$. Déterminer les moments et le produit d'inertie en fonction de m_6 et des caractéristiques géométriques du gouvernail.

$$[I_H(6)]_{\mathscr{B}_6} = [I_H(61)]_{\mathscr{B}_6} - [I_H(62)]_{\mathscr{B}_6}$$

Avec : pour le calcul des deux matrices, on remplace dans B-I-2 :

- Pour $[I_H(61)]_{\mathscr{B}_6}$: On remplace : $m_{61} \rightarrow \dfrac{4}{3}m_6$; $b \rightarrow 2b$ et $h \rightarrow 2h$.
- Pour $[I_H(62)]_{\mathscr{B}_6}$: On remplace : $m_{61} \rightarrow \dfrac{1}{3}m_6$; $b \rightarrow b$ et $h \rightarrow h$.

NE RIEN ECRIRE ICI

Et on obtient : $[I_E(61)]_{\mathcal{B}_5} = \begin{bmatrix} \frac{8m_6h^2}{3}+\frac{8m_6b^2}{9} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{8m_6h^2}{3} & \frac{4m_6hb}{3} \\ 0 & \frac{4m_6hb}{3} & \frac{8m_6b^2}{9} \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_5}$

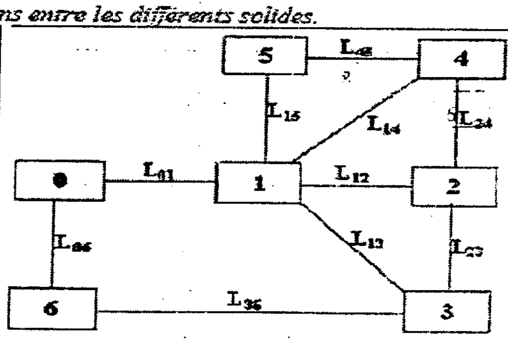
$$[I_E(62)]_{\mathcal{B}_5} = \begin{bmatrix} \frac{m_6h^2}{6}+\frac{m_6b^2}{18} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_6h^2}{6} & \frac{m_6hb}{12} \\ 0 & \frac{m_6hb}{12} & \frac{m_6b^2}{18} \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_6}$$

D'où : $\boxed{[I_E(6)]_{\mathcal{B}_5} = \begin{bmatrix} \frac{5m_6h^2}{2}+\frac{5m_6b^2}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5m_6h^2}{2} & \frac{5m_6hb}{4} \\ 0 & \frac{5m_6hb}{4} & \frac{5m_6b^2}{6} \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_5}}$

B-II. ETUDE CINEMATIQUE

B-II-1. *Tracer le graphe des liaisons en identifiant les liaisons entre les différents solides.*

- L_{01} : Liaison pivot d'axe $(O,\vec{z}_0)$
- L_{23} : Liaison hélicoïdale à filetage droit d'axe $(D,\vec{x}_1)$
- L_{13} : Liaison glissière d'axe $(E,\vec{x}_1)$
- L_{36} : Liaison rotule de centre F
- L_{06} : Liaison pivot d'axe $(H,\vec{z}_0)$
- L_{12} : Liaison pivot d'axe $(O_1,\vec{x}_1)$
- L_{24} : Liaison ponctuelle de normale $(I,\vec{y}_1)$
- L_{14} : Liaison pivot d'axe $(A,\vec{x}_1)$
- L_{45} : Liaison hélicoïdale à filetage gauche d'axe $(B,\vec{x}_1)$
- L_{15} : Liaison glissière d'axe $(C,\vec{x}_1)$



B-II-2. *Déterminer les vecteurs rotations :* $\vec{\Omega}(1/0)$, $\vec{\Omega}(2/1)$, $\vec{\Omega}(3/1)$, $\vec{\Omega}(4/1)$, $\vec{\Omega}(5/1)$ *et* $\vec{\Omega}(6/0)$.

$\vec{\Omega}(1/0) = -\dot{\alpha}\,\vec{z}_0$

$\vec{\Omega}(2/1) = \dot{\varphi}\,\vec{x}_1$

$\vec{\Omega}(3/1) = \vec{0}$

$\vec{\Omega}(4/1) = -\dot{\theta}\,\vec{x}_1$

$\vec{\Omega}(5/1) = \vec{0}$

$\vec{\Omega}(6/0) = -\dot{\psi}\,\vec{z}_0$

B-II-3-a. Calculer le vecteur vitesse : $\vec{V}(I\in 2/1)$.

$$\vec{V}(I \in 2/1) = \vec{V}(O_1 \in 2/1) + \vec{\Omega}(2/1) \wedge \overline{O_1I}$$

NE RIEN ECRIRE ICI

$$\left|\begin{array}{l}\vec{V}(O_1 \in 2/1) = \vec{0} \\ \vec{\Omega}(2/1) = \dot{\varphi}\,\vec{x}_1 \\ \overrightarrow{O_1I} = -a_1\vec{x}_1 - R_1\vec{y}_1\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{V}(I \in 2/1) = -R_1\,\dot{\varphi}\,\vec{z}_1}$$

B-II-3-b. Calculer le vecteur vitesse : $\vec{V}(I\in 4/1)$.

$$\vec{V}(I \in 4/1) = \vec{V}(A \in 4/1) + \vec{\Omega}(4/1) \wedge \overrightarrow{AI}$$

$$\left|\begin{array}{l}\vec{V}(A \in 4/1) = \vec{0} \\ \vec{\Omega}(4/1) = -\dot{\theta}\,\vec{x}_1 \\ \overrightarrow{AI} = -a_2\,\vec{x}_1 + R_2\vec{y}_1\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{V}(I \in 4/1) = -R_2\,\dot{\theta}\,\vec{z}_1}$$

B-II-3-c. *En appliquant la condition de roulement sans glissement entre les solides (1) et (1) au point I, exprimer la relation entre $\dot{\varphi}$ et $\dot{\theta}$.*

$$\vec{V}(I \in 4/2) = \vec{V}(I \in 4/1) - \vec{V}(I \in 2/1) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \boxed{R_1\,\dot{\varphi} = R_2\,\dot{\theta}}$$

B-II-4. Ecrire le torseur cinématique, au point D, du solide (3) dans son mouvement par rapport au repère $(\mathcal{R}_2)$: $\{\mathcal{V}(3/2)\}_D$ en fonction de $\dot{\varphi}$ et de p_1.

$$\{\mathcal{V}(3/2)\}_D = \left\{\begin{array}{c}\vec{\Omega}(3/2) \\ \vec{V}(D \in 3/2)\end{array}\right\}_D$$

$$\left|\begin{array}{l}\vec{\Omega}(3/2) = \vec{\Omega}(3/1) - \vec{\Omega}(2/1) = -\dot{\varphi}\,\vec{x}_1 \\ \vec{V}(D \in 3/2) = \dfrac{p_1}{2\pi}\vec{\Omega}(3/2) \quad \text{car liaison hélicoïdale à filetage droit}\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \boxed{\{\mathcal{V}(3/2)\}_D = \left\{\begin{array}{c}-\dot{\varphi}\,\vec{x}_1 \\ -\dfrac{p_1}{2\pi}\dot{\varphi}\,\vec{x}_1\end{array}\right\}_D}$$

B-II-5. *Calculer, par dérivation directe, la vitesse $\vec{V}(D\in 3/1)$ et en déduire la relation entre $\dot{\varphi}$ et $\dot{x}(t)$.*

$$\triangleright\ \vec{V}(D \in 3/1) = \vec{V}(D/1) - \vec{V}(D/3) = \frac{d\overrightarrow{OD}}{dt}_{/\mathcal{R}_1} - \underbrace{\frac{d\overrightarrow{DD}}{dt}_{/\mathcal{R}_3}}_{\vec{0}}$$

NE RIEN ECRIRE ICI

$$\frac{d\overline{OD}}{dt}_{/\mathcal{R}_1} = \underbrace{\frac{d\overline{OO_1}}{dt}_{/\mathcal{R}_1}}_{\vec{0}} + \frac{d\overline{O_1D}}{dt}_{/\mathcal{R}_1} = \dot{x}(t)\,\vec{x}_1$$

$$\boxed{\vec{V}(D \in 3/1) = \dot{x}(t)\,\vec{x}_1}$$

➢ $\vec{V}(D \in 3/2) = \vec{V}(D \in 3/1) - \vec{V}(D \in 2/1)$

$$\vec{V}(D \in 3/2) = -\frac{p_1}{2\pi}\dot{\varphi}\,\vec{x}_1$$
$$\vec{V}(D \in 2/1) = \vec{V}(O_1 \in 2/1) + \vec{\Omega}(2/1) \wedge \overline{O_1D} = \vec{0}$$
$$\vec{V}(D \in 3/1) = \dot{x}(t)\,\vec{x}_1$$

$$\boxed{\dot{x}(t) = -\frac{p_1}{2\pi}\dot{\varphi}}$$

B-II-6. *Ecrire le torseur cinématique, au point B, du solide (5) dans son mouvement par rapport au repère ($\mathcal{R}_4$) : $\{\mathcal{V}(5/4)\}_B$ en fonction de $\dot{\theta}$ et de p_2.*

$$\{\mathcal{V}(5/4)\}_B = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(5/4) \\ \vec{V}(B \in 5/4) \end{Bmatrix}_B$$

$$\vec{\Omega}(5/4) = \vec{\Omega}(5/1) - \vec{\Omega}(4/1) = \dot{\theta}\,\vec{x}_1$$
$$\vec{V}(B \in 5/4) = \frac{-p_2}{2\pi}\vec{\Omega}(5/4) \quad \text{car liaison hélicoïdale à filetage gauche}$$

$$\boxed{\{\mathcal{V}(5/4)\}_B = \begin{Bmatrix} \dot{\theta}\,\vec{x}_1 \\ -\frac{p_2}{2\pi}\dot{\theta}\,\vec{x}_1 \end{Bmatrix}_B}$$

B-II-7. *Calculer, par dérivation directe, la vitesse $\vec{V}(B \in 5/1)$ et en déduire la relation entre $\dot{\theta}$ et $\dot{\lambda}(t)$.*

➢ $\vec{V}(B \in 5/1) = \vec{V}(B/1) - \vec{V}(B/5) = \frac{d\overline{OB}}{dt}_{/\mathcal{R}_1} - \underbrace{\frac{d\overline{BB}}{dt}_{/\mathcal{R}_5}}_{\vec{0}}$

$$\frac{d\overline{OB}}{dt}_{/\mathcal{R}_1} = \underbrace{\frac{d\overline{OA}}{dt}_{/\mathcal{R}_1}}_{\vec{0}} + \frac{d\overline{AB}}{dt}_{/\mathcal{R}_1} = \dot{\lambda}(t)\,\vec{x}_1$$

$$\boxed{\vec{V}(B \in 5/1) = \dot{\lambda}(t)\,\vec{x}_1}$$

➢ $\vec{V}(B \in 5/4) = \vec{V}(B \in 5/1) - \vec{V}(B \in 4/1)$

NE RIEN ECRIRE ICI

$$\left|\begin{array}{l}\vec{V}(B\in 5/4) = -\dfrac{p_2}{2\pi}\dot{\theta}\,\vec{x}_1\\ \vec{V}(B\in 4/1) = \vec{V}(A\in 4/1) + \vec{\Omega}(4/1)\wedge\overline{AB} = \vec{0}\\ \vec{V}(D\in 3/1) = \dot{\lambda}(t)\,\vec{x}_1\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{\lambda}(t) = -\frac{p_2}{2\pi}\dot{\theta}}$$

B-II-8. Trouver le rapport $\dfrac{\dot{x}(t)}{\dot{\lambda}(t)}$ *en fonction des pas p_1 et p_2 et des rayons R_1 et R_2.*

$$\left.\begin{array}{l}R_1\,\dot{\varphi} = R_2\,\dot{\theta}\\ \dot{x}(t) = -\dfrac{p_1}{2\pi}\dot{\varphi}\\ \dot{\lambda}(t) = -\dfrac{p_2}{2\pi}\dot{\theta}\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\frac{\dot{x}(t)}{\dot{\lambda}(t)} = \frac{p_1 R_2}{p_2 R_1}}$$

B-II-9-a. Calculer la vitesse : $\vec{V}(D\in 3/0)$ *en passant par O_1.*

$$\vec{V}(D\in 3/0) = \vec{V}(D\in 3/1) - \vec{V}(D\in 1/0)$$

$$\left\|\begin{array}{l}\vec{V}(D\in 3/1) = \dot{x}(t)\,\vec{x}_1 \qquad (B-II-5)\\ \vec{V}(D\in 1/0) = \vec{V}(O_1\in 1/0) + \vec{\Omega}(1/0)\wedge\overline{O_1D}\end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{l}\vec{\Omega}(1/0)\wedge\overline{O_1D} = -\dot{\alpha}\,\vec{z}_0\wedge x(t)\vec{x}_1 = -\dot{\alpha}\,x(t)\vec{y}_1\\ \vec{V}(O_1\in 1/0) = \vec{V}(O\in 1/0) + \vec{\Omega}(1/0)\wedge\overline{OO_1}\end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{l}\vec{V}(O\in 1/0) = \vec{0}\\ \vec{\Omega}(1/0)\wedge\overline{OO_1} = -\dot{\alpha}\,\vec{z}_0\wedge(-a_0\vec{x}_1 + b_0\vec{y}_1 + h_0\vec{z}_0) = a_0\,\dot{\alpha}\,\vec{y}_1 + b_0\,\dot{\alpha}\,\vec{x}_1\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{V}(D\in 3/0) = \left(\dot{x}(t) + b_0\,\dot{\alpha}\right)\vec{x}_1 + \left(a_0 - x(t)\right)\dot{\alpha}\,\vec{y}_1}$$

B-II-9-b. En déduire le vecteur vitesse : $\vec{V}(F\in 3/0)$.

$$\vec{V}(F\in 3/0) = \vec{V}(D\in 3/0) + \vec{\Omega}(3/0)\wedge\overline{DF}$$

$$\left|\begin{array}{l}\vec{V}(D\in 3/0) = (\dot{x}(t) + b_0\,\dot{\alpha})\vec{x}_1 + (a_0 - x(t))\,\dot{\alpha}\,\vec{y}_1\\ \vec{\Omega}(3/0) = \vec{\Omega}(3/1) + \vec{\Omega}(1/0) = -\dot{\alpha}\,\vec{z}_0\\ \overline{DF} = a_5\vec{x}_1\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{V}(F\in 3/0) = \left(\dot{x}(t) + b_0\,\dot{\alpha}\right)\vec{x}_1 + \left(a_0 - x(t) - a_5\right)\dot{\alpha}\,\vec{y}_1}$$

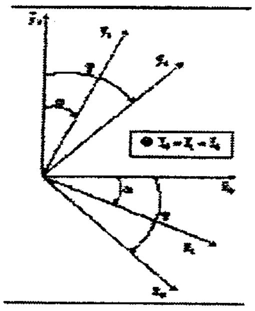
NE RIEN ECRIRE ICI

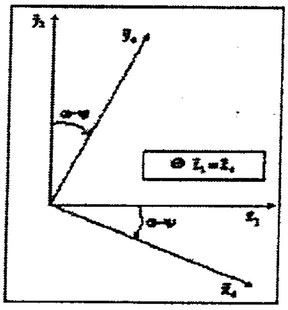
B-II-10. *Calculer la vitesse* $\vec{V}(F\in 6/0)$ *en passant par le point H et l'exprimer dans la base* $\mathcal{B}_1$.

$$\vec{V}(F\in 6/0)=\vec{V}(H\in 6/0)+\vec{\Omega}(6/0)\wedge\overline{HF}$$

$$\left|\begin{array}{l}\vec{V}(H\in 6/0)=\vec{0}\\ \vec{\Omega}(6/0)=-\dot{\psi}\,\vec{z}_0\\ \overline{HF}=-b_1\vec{y}_6\end{array}\right.$$

$$\boxed{\vec{V}(H\in 6/0)=-b_1\,\dot{\psi}\,\vec{x}_6}$$





$$\Rightarrow\ \begin{cases}\vec{x}_6=\cos(\psi-\alpha)\vec{x}_1-\sin(\psi-\alpha)\vec{y}_1\\ \vec{y}_6=\sin(\psi-\alpha)\vec{x}_1+\cos(\psi-\alpha)\vec{y}_1\end{cases}$$

$$\boxed{\vec{V}(H\in 6/0)=-b_1\,\dot{\psi}\cos(\psi-\alpha)\vec{x}_1+b_1\,\dot{\psi}\sin(\psi-\alpha)\vec{y}_1}$$

B-II-11. *Ecrire la condition cinématique au point F et en déduire le système d'équations qui en découle.* 5

F est le centre d'une liaison rotule entre (6) et (3), alors :

$$\vec{V}(F\in 6/3)=\vec{V}(F\in 6/0)-\vec{V}(F\in 3/0)=\vec{0}\Leftrightarrow\vec{V}(F\in 6/0)=\vec{V}(F\in 3/0)$$

$$\boxed{\begin{cases}\dot{x}(t)+b_3\,\dot{\alpha}=-b_1\,\dot{\psi}\cos(\psi-\alpha)\\ a_0-x(t)-a_5=b_1\,\dot{\psi}\sin(\psi-\alpha)\end{cases}}$$

B-II-12. *Calculer la vitesse* $\vec{V}(G_6/0)$ *en passant par le point H.*

$$\vec{V}(G_6/0)=\frac{d\overline{OG_6}}{dt}_{/\mathcal{R}_0}=\underbrace{\frac{d\overline{OH}}{dt}_{/\mathcal{R}_0}}_{\vec{0}}+\frac{d\overline{HG_6}}{dt}_{/\mathcal{R}_0}$$

$$\left|\frac{d\overline{HG_6}}{dt}_{/\mathcal{R}_0}=\frac{d}{dt}\left(b_6\vec{y}_6-h_6\vec{z}_0\right)_{/\mathcal{R}_0}=b_6\dot{\psi}\,\vec{x}_6\right.$$

$$\boxed{\vec{V}(G_6/0)=b_6\,\dot{\psi}\,\vec{x}_6}$$

NE RIEN ECRIRE ICI

B-III. ETUDE CINETIQUE

B-III-1. *Calculer le torseur cinétique, au point D, du solide (3) dans son mouvement par rapport au bâti (0) :* $\{\mathscr{C}(3/0)\}_D$.

$$\{\mathscr{C}(3/0)\}_D = \begin{Bmatrix} m_3\vec{V}(D/0) \\ \vec{\sigma}_D(3/0) \end{Bmatrix}_D$$ car D est le centre d'inertie de (3).

$$\vec{V}(D/0) = \vec{V}(D \in 3/0) = (\dot{x}(t) + b_0\dot{\alpha})\vec{x}_1 + (a_0 - x(t))\dot{\alpha}\,\vec{y}_1$$

$$\vec{\sigma}_D(3/0) = \vec{J}_D(3, \vec{\Omega}(3/0)) = [I_D(3)]_{\Re_3}\vec{\Omega}(3/0) \quad \text{(cas particulier : D est le centre d'inertie de (3))}$$

$$= \begin{bmatrix} \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ \times & \times & J_3 \end{bmatrix}_{\Re_3} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dot{\alpha} \end{pmatrix}_{\Re_3} = -J_3\dot{\alpha}\,\vec{z}_0$$

$$\boxed{\{\mathscr{C}(3/0)\}_D = \begin{Bmatrix} m_3(\dot{x}(t) + b_0\dot{\alpha}) & 0 \\ m_3(a_0 - x(t))\dot{\alpha} & 0 \\ 0 & -J_3\dot{\alpha} \end{Bmatrix}_D^{\Re_1}}$$

B-III-2. *Calculer le torseur cinétique, au point H, du solide (6) dans son mouvement par rapport au bâti (0) :* $\{\mathscr{C}(6/0)\}_H$.

$$\{\mathscr{C}(6/0)\}_H = \begin{Bmatrix} m_6\vec{V}(G_6/0) \\ \vec{\sigma}_H(6/0) \end{Bmatrix}_H$$

5

$$\vec{V}(G_6/0) = b_6\dot{\psi}\,\vec{x}_6$$

$$\vec{\sigma}_H(6/0) = \vec{J}_H(6, \vec{\Omega}(6/0)) = [I_H(6)]_{\Re_6}\vec{\Omega}(6/0) \quad \text{(cas particulier : H est fixe par rapport à } \Re_0\text{)}$$

$$= \begin{bmatrix} A_6 & 0 & 0 \\ 0 & B_6 & -D_6 \\ 0 & -D_6 & C_6 \end{bmatrix}_{\Re_6} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dot{\psi} \end{pmatrix}_{\Re_6} = \begin{pmatrix} 0 \\ D_6\dot{\psi} \\ C_6\dot{\psi} \end{pmatrix}_{\Re_6}$$

$$\boxed{\{\mathscr{C}(6/0)\}_H = \begin{Bmatrix} m_6 b_6\dot{\psi} & 0 \\ 0 & D_6\dot{\psi} \\ 0 & -C_6\dot{\psi} \end{Bmatrix}_H^{\Re_6}}$$

B-III-3. *Soit* $\{E_1\} = \{1,2,3,4,5,6\}$, *Calculer l'énergie cinétique du système* $\{E_1\}$ *dans son mouvement par rapport au bâti [0] :* $E_C(E_1/0)$.

$$E_C(E_1/0) = E_C(3/0) + E_C(6/0) + \underbrace{E_C(1/0) + E_C(2/0) + E_C(4/0) + E_C(5/0)}_{0 \text{ car } m_1,\, m_2,\, m_4 \text{ et } m_5 \text{ sont négligeables}}$$

NE RIEN ECRIRE ICI

$$E_C(E_1/0)=\frac{1}{2}\{\mathscr{C}(3/0)\}_D\{\mathscr{V}(3/0)\}_D+\frac{1}{2}\{\mathscr{C}(6/0)\}_H\{\mathscr{V}(6/0)\}_H$$

$$=\frac{1}{2}\begin{Bmatrix} m_3\vec{V}(D/0) \\ [I_D(3)]\vec{\Omega}(3/0)\end{Bmatrix}_D\begin{Bmatrix}\vec{\Omega}(3/0)\\ \vec{V}(D\in 3/0)\end{Bmatrix}_D+\frac{1}{2}\begin{Bmatrix} m_6\vec{V}(G_6/0) \\ [I_H(6)]\vec{\Omega}(6/0)\end{Bmatrix}_H\begin{Bmatrix}\vec{\Omega}(6/0)\\ \underbrace{\vec{V}(H\in 6/0)}_{\vec{0}}\end{Bmatrix}_H$$

$$\boxed{E_C(E_1/0)=\underbrace{\frac{1}{2}\,{}^t\vec{\Omega}(3/0)[I_D(3)]\vec{\Omega}(3/0)}_{\text{Correspondant au mouvement de rotation de (3) \% à } \Re_0}+\underbrace{\frac{1}{2}m_3\left(\vec{V}(D/0)\right)^2}_{\text{Correspondant au mouvement de translation de (3) \% à } \Re_0}+\underbrace{\frac{1}{2}\,{}^t\vec{\Omega}(6/0)[I_H(6)]\vec{\Omega}(6/0)}_{\text{Correspondant au mouvement de rotation de (6) \% à } \Re_0}}$$

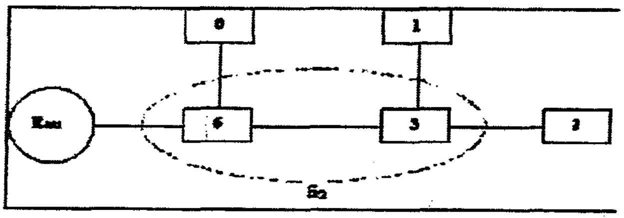
$$E_C(E_1/0)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 0 & -\dot{\alpha}\end{pmatrix}_{\mathscr{B}_3}\begin{bmatrix}\times & \times & \times\\ \times & \times & \times\\ \times & \times & J_3\end{bmatrix}_{\mathscr{B}_3}\begin{pmatrix}0\\0\\-\dot{\alpha}\end{pmatrix}_{\mathscr{B}_3}+\frac{1}{2}m_3\left((\dot{x}(t)+b_0\dot{\alpha})\vec{x}_1+(a_0-x(t))\dot{\alpha}\,\vec{y}_1\right)^2$$

$$+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 0 & -\dot{\psi}\end{pmatrix}_{\mathscr{B}_6}\begin{bmatrix}A_6 & 0 & 0\\ 0 & B_6 & -D_6\\ 0 & -D_6 & C_6\end{bmatrix}_{\mathscr{B}_6}\begin{pmatrix}0\\0\\-\dot{\psi}\end{pmatrix}_{\mathscr{B}_6}$$

$$\boxed{E_C(E_1/0)=\frac{1}{2}m_3\left[(\dot{x}(t)+b_0\dot{\alpha})^2+(a_0-x(t))^2\dot{\alpha}^2\right]+\frac{1}{2}\left[J_3\dot{\alpha}^2+C_6\dot{\psi}^2\right]}$$

B-IV. ETUDE ENERGETIQUE

B-IV-1. *Faire l'inventaire des actions mécaniques exercées sur le système {E2}={3,6}.*



- **Actions mécaniques à distance :** On néglige l'action mécanique de la pesanteur.
- **Actions mécaniques de contact :** Eau → (6) ; (0) → (6) ; (1) → (3) et (2) → (3). Remarquons que les actions de (1) et (2) sur (3) représentent $\overline{(3)}\rightarrow(3)$.

$$\{\tau(\text{eau}\rightarrow 6)\}_H=\begin{Bmatrix}-F_0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & C_0\end{Bmatrix}_H^{\mathscr{B}_6}\qquad \{\tau(\bar{3}\rightarrow 3)\}_D=\begin{Bmatrix}F_1 & 0\\ F_2 & 0\\ 0 & C_R\end{Bmatrix}_D^{\mathscr{B}_1}$$

$$\{\tau(0\rightarrow 6)\}_H=\begin{Bmatrix}X_{06} & L_{06}\\ Y_{06} & M_{06}\\ Z_{06} & 0\end{Bmatrix}_H^{\mathscr{B}_6}$$: Correspondant à la liaison pivot d'axe $(H,\vec{z}_0)$ entre (0) et (6).

NE RIEN ECRIRE ICI

B-IV-2. Calculer la puissance des actions mécaniques extérieures exercées sur le système {E2} dans son mouvement par rapport au bâti (0).

$$P(\overline{E_2} \to E_2/0) = P(0 \to 6/0) + P(eau \to 6/0) + P(\overline{3} \to 3/0)$$

- $P(0 \to 6/0) = P(0 \leftrightarrow 6) - \cancel{P(6 \to 0/0)} = 0$ car la liaison entre (0) et (6) est parfaite.
- $P(eau \to 6/0) = \left\{\tau(eau \to 6)\right\}_H \left\{\mathcal{V}(6/0)\right\}_H$

$$= \begin{Bmatrix} -F_0\vec{x}_5 \\ C_0\vec{z}_0 \end{Bmatrix}_H \begin{Bmatrix} -\dot{\psi}\vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_H = -C_0\dot{\psi}$$

- $P(\overline{3} \to 3/0) = \left\{\tau(\overline{3} \to 3)\right\}_D \left\{\mathcal{V}(3/0)\right\}_D$

$$= \begin{Bmatrix} F_1\vec{x}_1 + F_2\vec{y}_1 \\ C_R\vec{z}_0 \end{Bmatrix}_D \begin{Bmatrix} -\dot{\alpha}\vec{z}_0 \\ (\dot{x}(t) + b_0\dot{\alpha})\vec{x}_1 + (a_0 - x(t))\dot{\alpha}\vec{y}_1 \end{Bmatrix}_D$$

$$= (\dot{x}(t) + b_0\dot{\alpha})F_1 + (a_0 - x(t))\dot{\alpha}F_2 - C_R\dot{\alpha}$$

$$\boxed{P(\overline{E_2} \to E_2/0) = -C_0\dot{\psi} - C_R\dot{\alpha} + (\dot{x}(t) + b_0\dot{\alpha})F_1 + (a_0 - x(t))\dot{\alpha}F_2}$$

5

B-IV-3. Ecrire l'équation qui découle de l'application du théorème de l'énergie cinétique au système {E2} dans son mouvement par rapport au bâti (0).

- $\mathcal{P}_{int} = 0$ car la liaison entre (3) et (6) est une liaison parfaite.

$$TEC : \frac{dE_C(E_2/0)}{dt} = P(\overline{E_2} \to E_2/0) + \mathcal{P}_{int}$$

$$E_C(E_2/0) = E_C(E_1/0) \quad (B-III-3)$$

$$\frac{dE_C(E_2/0)}{dt} = m_3\left[(\ddot{x}(t) + b_0\ddot{\alpha})(\dot{x}(t) + b_0\dot{\alpha}) + (a_0 - x(t))\dot{x}(t)\dot{\alpha}^2 (a_0 - x(t))^2\dot{\alpha}\ddot{\alpha} + \right] + J_3\dot{\alpha}\ddot{\alpha} + C_6\dot{\psi}\ddot{\psi}$$

$$\boxed{\begin{aligned} & m_3\left[(\ddot{x}(t) + b_0\ddot{\alpha})(\dot{x}(t) + b_0\dot{\alpha}) + (a_0 - x(t))\dot{x}(t)\dot{\alpha}^2 (a_0 - x(t))^2\dot{\alpha}\ddot{\alpha} + \right] + J_3\dot{\alpha}\ddot{\alpha} + C_6\dot{\psi}\ddot{\psi} = \\ & -C_0\dot{\psi} - C_R\dot{\alpha} + (\dot{x}(t) + b_0\dot{\alpha})F_1 + (a_0 - x(t))\dot{\alpha}F_2 \end{aligned}}$$

NE RIEN ECRIRE ICI

PARTIE C : AUTOMATIQUE (Eléments de correction)

C.I.1) Propriétés du code utilisé :

C'est un code binaire réfléchi et cyclique.

C.I.2) Table de vérité

ENTREES				SORTIES			
a_3	a_2	a_1	a_0	S_3	S_2	S_1	S_0
0	0	0	0	-	-	-	-
0	0	0	1	-	-	-	-
0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	1	1	-	-	-	-
0	1	0	0	0	1	0	0
0	1	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	0	0	0	1
0	1	1	1	0	0	1	0
1	0	0	0	-	-	-	-
1	0	0	1	-	-	-	-
1	0	1	0	1	0	0	1
1	0	1	1	-	-	-	-
1	1	0	0	0	1	0	1
1	1	0	1	0	1	1	0
1	1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	0	1	1	1

A noter que le symbole « - » correspond à une combinaison qui peut prendre la valeur « 0 » ou la valeur « 1 », c'est à dire le symbole usuel « Φ ».

NE RIEN ECRIRE ICI

C.I.3) Tableaux de Karnaugh et équations de sorties :

a_3a_2 / a_1a_0	0 0	0 1	1 1	1 0
0 0	Φ	0	1	Φ
0 1	Φ	1	0	Φ
1 1	Φ	0	1	Φ
1 0	0	1	0	1

$$S_0 = a_3(\bar{a}_2 + \bar{a}_1\bar{a}_0 + a_1a_0) + \bar{a}_3(\bar{a}_1a_0 + a_2a_1\bar{a}_0)$$

a_3a_2 / a_1a_0	0 0	0 1	1 1	1 0
0 0	Φ	0	0	Φ
0 1	Φ	1	1	Φ
1 1	Φ	1	1	Φ
1 0	0	0	0	0

$$S1 = a_0$$

a_3a_2 / a_1a_0	0 0	0 1	1 1	1 0
0 0	Φ	1	1	Φ
0 1	Φ	0	1	Φ
1 1	Φ	0	1	Φ
1 0	0	0	0	0

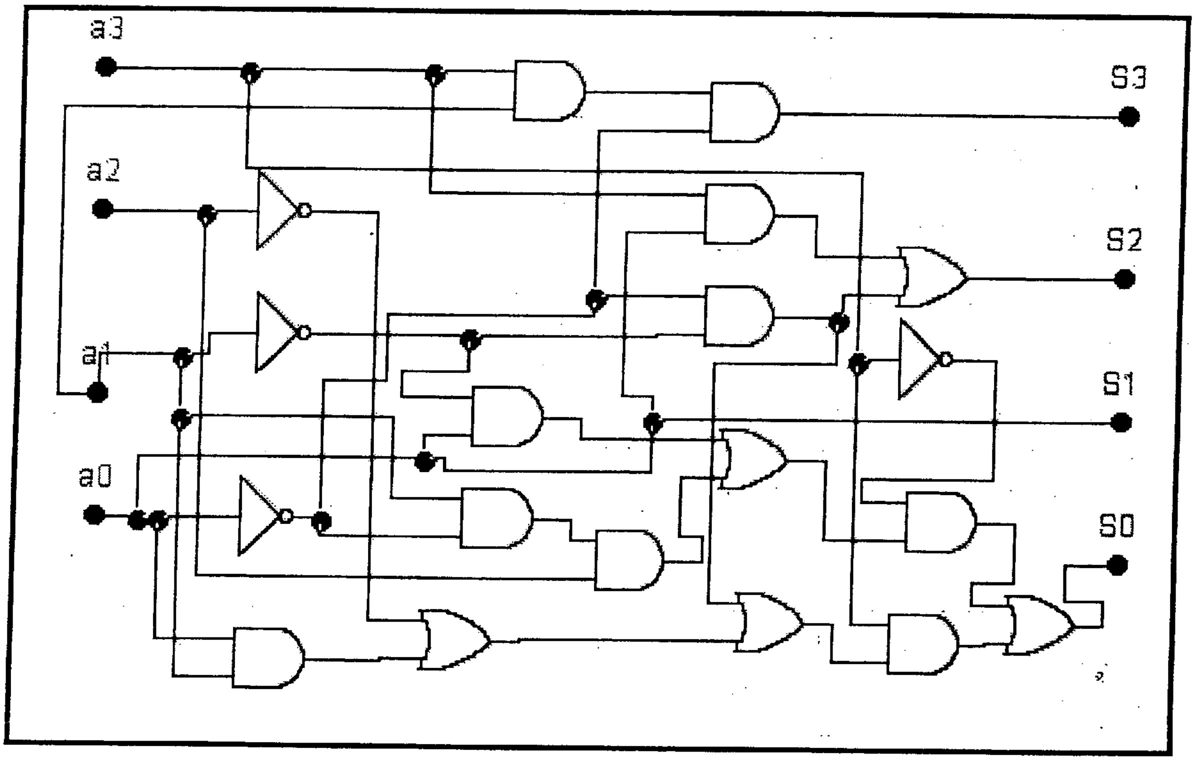
$$S_2 = \bar{a}_1\bar{a}_0 + a_3a_0$$

a_3a_2 / a_1a_0	0 0	0 1	1 1	1 0
0 0	Φ	0	0	Φ
0 1	Φ	0	0	Φ
1 1	Φ	0	0	Φ
1 0	0	0	1	1

$$S_3 = a_3a_1\bar{a}_0$$

NE RIEN ECRIRE ICI

C.I.4) Logigramme des sorties :



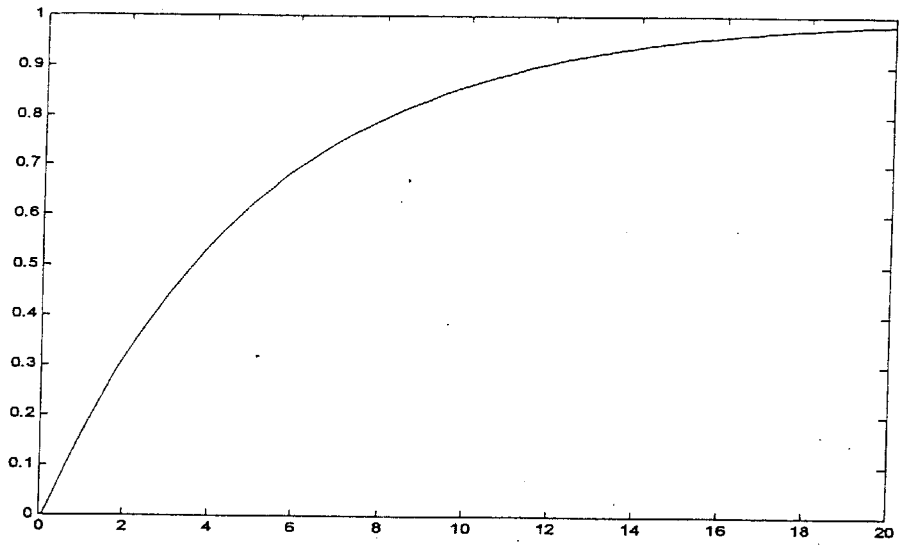
C.II.1)

Comme $U_a(p)=1$ et $T(p)=\dfrac{\theta(p)}{U_a(p)}=\dfrac{e^{-0.1p}}{p(1+5p)}$, alors : $\theta(p)=\dfrac{e^{-0.1p}}{p(1+5p)}$

En utilisant la transformée de Laplace inverse (L^{-1}), on en déduit l'expression de la réponse impulsionnelle unitaire donnée par :

$$\Omega_s(t)=(1-e^{-\frac{(t-0.1)}{5}})u(t)$$

NE RIEN ECRIRE ICI



On remarque que la réponse impulsionnelle est similaire à la réponse indicielle d'un système de premier ordre décalée de 0,1 s par rapport à l'origine à cause du retard exprimé par le terme $e^{-0.1p}$ et a cause de la présence d'un intégrateur dans T(p).

C.II.2.1)

Le retard est négligeable (c'est à dire $T(p)=\dfrac{1}{p(1+5p)}$)

La classe de ce système =1, ce qui implique que l'erreur statique de position est nulle ($\varepsilon_1(\infty)=0$).

La fonction du système en boucle fermée est donnée par :

$$H_{BF}(p)=\frac{KT(p)}{1+KT(p)}=\frac{K\dfrac{1}{p(1+5p)}}{1+K\dfrac{1}{p(1+5p)}}=\frac{K}{5p^2+p+K}$$

Il s'agit d'un système de second ordre stable pour K>0.

NE RIEN ECRIRE ICI

C.II.2.2.1)
A partir des lieux de Bode, on trouve les valeurs de la marge de gain et de la marge de phase qui sont données respectivement par :

MG=20 DB
MP= 68°

La classe de ce système avec retard =1, ce qui implique que l'erreur statique de position est nulle ($\varepsilon_1(\infty) = 0$).

C.II.2.2.2)
La valeur du gain limite (Kc) qui assure la stabilité du système en boucle fermée est définie par :

$20\log(Kc) = 20\text{DB}$ ce qui donne $Kc = 10^{\frac{20}{20}} = 10$

C.II.2.2.3)
La méthode fréquentielle nous a permis de déterminer les valeurs limites des marges de gain et de phase qui assurent la stabilité du système en boucle fermée malgré l'existence d'un retard dans la fonction de transfert (terme en exponentielle).
On remarque que, contrairement à la question C.II.2.1, la valeur du gain critique Kc n'est pas infinie vue qu'on a tenu compte du retard.

5

C.II.3)
Pour améliorer la rapidité du système, on propose d'utiliser un régulateur à action proportionnelle et dérivée (PD) de la forme :
$R(p) = K(1 + T_d p); \quad K > 0; \quad T_d > 0$
Ce type de régulateur assure à la fois la stabilité et la rapidité des systèmes asservis.