REPUBLIQUE TUNISIENNE
Ministère de l'Enseignement Supérieur
Concours nationaux d'entrée aux cycles de formation d'ingénieurs
Session 2005

الجمهورية التونسية
وزارة التعليم العالي
المناظرات الوطنية للدخول
إلى مراحل تكوين المهندسين
دورة 2005

Concours en Mathématiques et Physique
Epreuve de Physique

Date : Lundi 13 juin 2005 **Heure : 8 H 00** **Durée : 4 H** **Nb pages : 8**

Barème : Problème 1: 10 pts (A : 3.5 , B : 3.5 , C : 3); Problème 2: 10 pts (A : 4, B : 4, C : 2)

L'usage d'une calculatrice non programmable est autorisé

L'épreuve comporte deux problèmes indépendants. Chaque problème comporte des parties indépendantes. Le candidat peut les résoudre dans l'ordre qui lui convient en respectant néanmoins la numérotation des questions.

PROBLEME 1: Diffraction et interférence lumineuses

L'espace est rapporté à un repère (Oxyz) de base orthonormée directe $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$.

L'amplitude complexe diffractée en un point M supposé à l'infini par une ouverture plane de surface Σ et de facteur de transmission t(P) éclairée par une onde plane est donnée par :

$$\underline{s}(M) = \alpha\ \underline{s}_0 \iint_\Sigma t(P) \exp[j(\vec{k}_d - \vec{k}).\overrightarrow{OP}]\, d\Sigma$$

où $d\Sigma$ représente la surface élémentaire entourant un point P de l'ouverture, $\vec{k}$ et $\vec{k}_d$ les vecteurs d'onde associés respectivement à l'onde incidente et à l'onde diffractée. α est une constante et $\underline{s}_0$ est l'amplitude complexe de l'onde incidente. L'origine des phases est prise au point O de l'ouverture.

L'intensité lumineuse I est définie par la relation $I = \underline{s}\,\underline{s}^*$, où $\underline{s}^*$ désigne le complexe conjugué de $\underline{s}$.

On rappelle que la fonction sinus cardinal sinc(u) est définie par $\mathrm{sinc}(u) = \dfrac{\sin(u)}{u}$.

A- Diffraction par une fente

Une onde lumineuse plane monochromatique de longueur d'onde λ arrive sous incidence normale sur un écran opaque (E_0) contenant une fente, centrée sur O, parfaitement transparente de largeur a parallèlement à (Ox) et de longueur b parallèlement à (Oy) avec b >> a (Figure 1).
L'observation se fait sur un écran (E) placé au plan focal image d'une lentille convergente L de distance focale f et de foyer image F'.

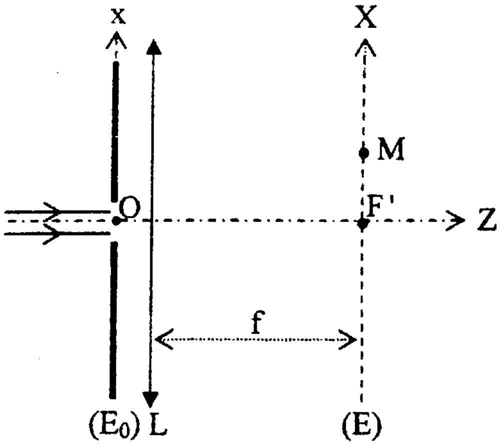

Figure 1

1.a) Représenter soigneusement le cheminement de la lumière jusqu'au point M de (E).
1.b) Représenter la figure de diffraction observée sur (E) en faisant apparaître les axes (F'X) et (F'Y) puis la décrire.
1.c) Montrer que l'expression de l'intensité diffractée en un point M de (E) s'écrit sous la forme : $I(M) = I_0 \,\mathrm{sinc}^2 u$,

avec $u = \dfrac{\pi a X}{\lambda f}$, où X représente l'abscisse du point M sur l'axe (F'X).

1.d) Représenter l'allure de I(u). En déduire la largeur de la tache centrale de diffraction.
2) On ajoute devant la fente percée dans (E_0) (Figure 1) un filtre de facteur de transmission en amplitude t(x) appelé transparence donnée par :

$$t(x) = \frac{1}{2}\left(1 + \cos\frac{2\pi x}{a}\right) \qquad |x| \leq \frac{a}{2}$$
$$t(x) = 0 \qquad \text{ailleurs}$$

2.a) Déterminer l'expression de l'intensité diffractée I_t en un point M de (E).
2.b) Représenter sur un même graphe l'allure de la répartition des intensités I(u) et $I_t(u)$. Commenter.
3) On retire le filtre, la fente diffractante est alors parfaitement transparente. La source ponctuelle S_0 étant placée au foyer objet d'une lentille convergente L_0. On rajoute une deuxième source ponctuelle S_1, de même intensité que S_0, dans le plan focal objet de L_0 de distance focale f et de centre C (Figure 2).

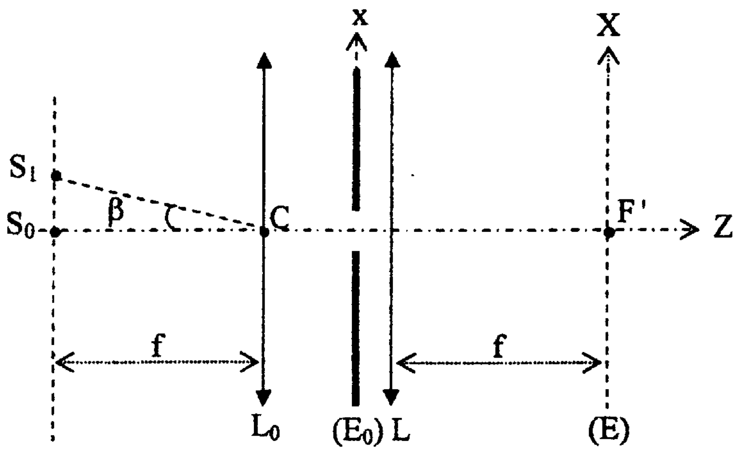

Figure 2

On note par β l'angle $S_0\hat{C}S_1$. On désigne par S_{0g} et S_{1g} les images géométriques respectivement de S_0 et S_1 par le système des deux lentilles.
3.a) Reprendre la figure 2 et construire S_{0g} et S_{1g}.
3.b) Y a t-il un phénomène d'interférences entre les deux ondes émises par les deux sources ? Justifier.

3.c) Montrer que, pour l'onde issue de S_1, la différence de marche en un point M de (E) s'écrit :

$$\delta = x\left(\frac{X}{f} + \beta\right)$$

3.d) Déterminer l'expression de l'intensité I_1 de l'onde diffractée issue de S_1 en un point M de (E).

3.e) En utilisant le critère de Rayleigh, déterminer la valeur minimale de β en dessous de laquelle on ne pourra pas séparer les deux images.

B- Cohérences spatiale et temporelle

On reprend maintenant le montage de la figure 1 et on perce une deuxième fente fine dans (E_0). L'écran (E_0) contient désormais deux fentes fines F_1 et F_2 parfaitement transparentes identiques de largeur a et distantes de d (Figure 3). En pratique on a toujours $a \ll d$.
La source S_0 est remplacée par une fente source F_S de largeur e réglable parallèlement à l'axe (F'X) et centrée sur le foyer objet d'une lentille convergente L_0 de distance focale f (Figure 3).

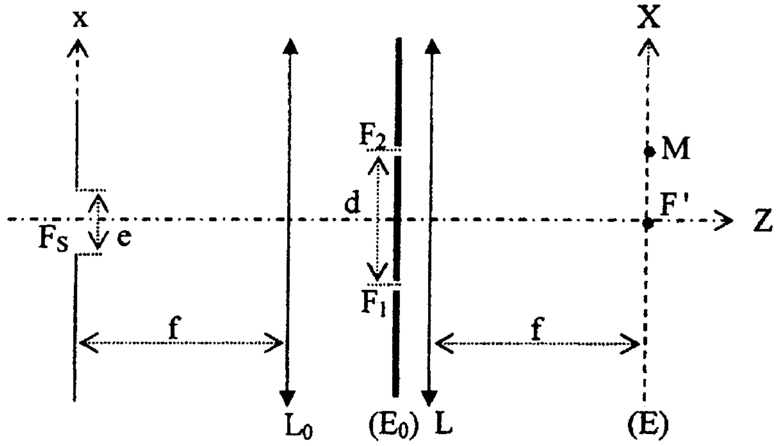

Figure 3

F_S est éclairée par une source monochromatique de longueur d'onde λ.

1) La fente source F_S est infiniment fine.

1.a) Déterminer la différence de marche entre les ondes diffractées dans une même direction par les deux fentes.

1.b) Déterminer l'expression de l'intensité I(M) en un point M d'abscisse X et la mettre sous la forme suivante: $I(M) = I_0 H . G$.
Donner la signification des fonctions H et G.

1.c) Que devient I(M) dans le cas où $X \ll \frac{\lambda f}{a}$. Déterminer dans ce cas le contraste $C = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}$.

On suppose dans toute la suite de cette partie que pour tout point M d'abscisse X de (E) la condition $X \ll \frac{\lambda f}{a}$ est vérifiée.

2) *Elargissement de la fente source*

On augmente progressivement la largeur e de la fente source F_S.
On suppose que l'intensité élémentaire dI émise par un élément dx, centré sur un point d'abscisse x, de la fente F_S en un point M de (E) s'écrit:

$$dI = 2\frac{I_0}{e}\left[1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\delta(M)\right)\right]dx$$

où $\delta(M)$ est la différence de marche en un point M de (E).

2.a) Décrire qualitativement l'effet de l'élargissement de la fente source sur la figure d'interférence.

2.b) Montrer que $\delta(M)$ s'écrit sous la forme :

$$\delta(M) = \frac{x+X}{f}\, d$$

2.c) Déterminer l'expression de l'intensité I(M) en un point M de (E).

En déduire la valeur e_1 de la largeur de la fente F_S pour laquelle on a une première annulation du contraste. Commenter.

On donne : $\lambda = 600$ nm, d = 1 mm et f = 1 m.

3) *Etendue spectrale de la source*

La fente source F_S <u>infiniment fine</u> placée au foyer objet de L_0 est maintenant éclairée par la lumière blanche (400 nm < λ < 750 nm).

3.a) Décrire qualitativement l'aspect de l'écran.

3.b) En analysant la lumière en un point du blanc d'ordre supérieur on remarque l'absence de certaines radiations du spectre. Un tel spectre est appelé spectre cannelé. Déterminer le nombre de radiations éteintes pour X = 3 mm.

C- <u>Diffraction par un réseau</u>

L'écran opaque (E_0) contient N fentes fines identiques parallèles régulièrement espacées de même largeur a. On constitue ainsi un réseau par transmission de largeur utile ℓ et de période spatiale d (pas du réseau). Le réseau est éclairé sous incidence normale par une onde lumineuse plane monochromatique de longueur d'onde λ. L'observation se fait sur un écran (E) placé dans le plan focal image d'une lentille convergente de distance focale f.

On donne : d = 5 μm, f = 1 m, ℓ = 20 mm.

On désigne par θ l'angle entre la direction d'observation et l'axe optique.

1) Ecrire la relation fondamentale pour un réseau par transmission donnant les directions des maxima d'intensité pour une incidence normale.

2) Montrer que l'expression de l'intensité diffractée en un point M de (E) s'écrit sous la forme :

$$I_R(M) = I_{0R}\left[\mathrm{sinc}\left(\frac{\pi a X}{\lambda f}\right)\right]^2 \left[\frac{\sin\left(\frac{N d \pi X}{\lambda f}\right)}{N\sin\left(\frac{d \pi X}{\lambda f}\right)}\right]^2$$

3) La source monochromatique est remplacée par une lampe à vapeur de mercure émettant trois radiations de longueurs d'onde $\lambda_1 = 496$ nm, $\lambda_2 = 546$ nm et $\lambda_3 = 577$ nm.

3.a) Y-a-t-il dispersion entre les maxima principaux d'intensité produites par chaque radiation à l'ordre 0 ? Justifier.

3.b) Déterminer l'expression du coefficient de dispersion angulaire $D_{ang} = \frac{d\theta}{d\lambda}$ du réseau en fonction de d et l'ordre p du spectre.

En pratique, justifier le choix d'un seul paramètre pour augmenter la dispersion angulaire.

3.c) Calculer la position du maximum produit par chaque radiation pour le premier ordre du spectre.

3.d) Le réseau est maintenant éclairé par la lampe spectrale de sodium émettant deux radiations de longueurs d'onde voisines $\lambda_1 = 589$ nm et $\lambda_2 = 589{,}6$ nm.

Rappeler l'expression du pouvoir de résolution du réseau.

Ces deux radiations sont-elles résolues au premier ordre? Justifier.

PROBLEME 2: Induction électromagnétique et transferts thermiques

L'espace est rapporté à un référentiel galiléen (Oxyz) de base orthonormée directe $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$. Un point M de l'espace peut être repéré soit par ses coordonnées cartésiennes (x,y,z) soit par ses coordonnées sphériques (r,θ,φ) dans la base sphérique $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$.

Dans tout le problème on se place dans le cadre de l'approximation des régimes quasi stationnaires (ARQS) et on néglige les frottements.

On rappelle que:

- le champ magnétique $\vec{B}$ créé par une spire circulaire de rayon a de centre O parcourue par un courant d'intensité i (Figure 1) en un point de son axe (Oz) est donné par:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2a}\sin^3\beta\,\vec{u}_z$$

où $\mu_0 = 4\pi\,10^{-7}$ (SI) est la perméabilité magnétique du vide.

- le potentiel vecteur $\vec{A}_d$ créé par un dipôle magnétique de moment $\vec{m} = m\,\vec{u}_z$ est donné par:

$$\vec{A}_d = A_\varphi\,\vec{u}_\varphi = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\vec{m}\wedge\frac{\vec{r}}{r^3}.$$

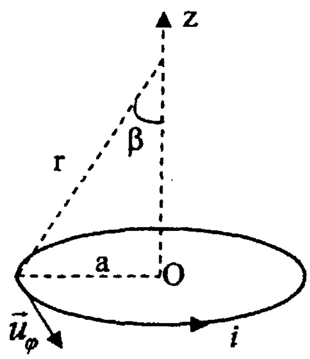

Figure 1

A- Action d'un champ magnétique permanent sur une spire

On se propose d'étudier l'action d'un champ magnétique permanent sur une spire conductrice S de rayon a caractérisée par sa résistance électrique R et son inductance propre L.

La spire S peut tourner autour de l'un de ses diamètres confondu avec l'axe (Oy). S est orientée par un vecteur unitaire $\vec{n}$ contenu dans le plan (xOz) et porté par son axe. Les rotations de S sont repérées par l'angle $\alpha(t) = (\vec{u}_z, \vec{n})$ comme le montre la figure 2.

La spire S peut tourner dans une région où règne un champ magnétique uniforme extérieur $\vec{B}_e$ qui a pour expression $\vec{B}_e = B_0\,\vec{u}_z$ où B_0 est une constante.

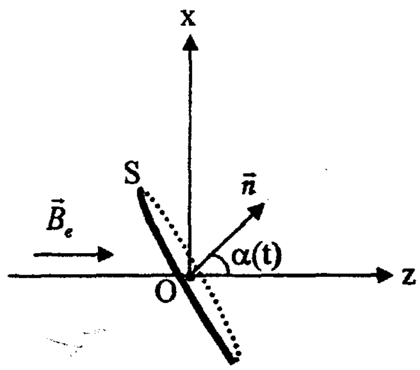

Figure 2

I- Initialement, S n'est parcourue par aucun courant. A partir de cet état initial, S est animée d'un mouvement de rotation autour de l'axe Oy.

1.a) Déterminer le flux Φ_e du champ $\vec{B}_e$ à travers S. On exprimera Φ_e en fonction de sa valeur maximale Φ_0 et de α.

1.b) En déduire la force électromotrice (fem) induite par $\vec{B}_e$ dans S.

2.a) Déterminer le champ électromoteur $\vec{E}_m$.

2.b) Retrouver l'expression de la fem induite dans S.

3) Expliquer brièvement l'origine du courant *i(t)* circulant dans S.

4) Au bout d'un temps t_1, le courant *i(t)* circulant dans S a atteint la valeur I_1. A partir de cet instant, on immobilise brusquement la spire S. On se propose d'étudier l'évolution du courant dans S à partir de t_1.

4.a) Déterminer l'évolution du courant *i(t)* dans S. On fait apparaître dans le résultat la constante $\tau = \frac{L}{R}$. Que représente τ ? Quelle est son unité ?

4.b) Au bout de combien de temps l'intensité maximale de *i(t)* est réduite de moitié ?

II- Dans toute la suite de cette partie, on suppose que la résistance électrique de S est négligeable (R = 0).
Initialement, S n'est le siège d'aucune fem et n'est parcourue par aucun courant.
Un opérateur extérieur effectue de façon quasistatique (le système est à chaque instant en équilibre) la rotation de S de sa position initiale définie par $\alpha_1 = 0$ à sa position finale définie par $\alpha_2 = \frac{\pi}{2}$.

1.a) En utilisant la loi de Faraday montrer que le flux total Φ à travers S garde une valeur constante.
1.b) En déduire l'expression du courant *i(t)* circulant dans S en fonction de Φ_0, L et α.
Comment évolue le champ magnétique induit au cours de cette opération?
Enoncer la loi de Lenz et vérifier que le résultat obtenu est conforme à cette loi.
2) Déterminer l'expression de l'énergie magnétique propre maximale W_m de S en fonction de Φ_0 et L.
3) Sachant que le mouvement de S est effectué de façon quasistatique, exprimer en fonction de Φ_0, L et de α le moment Γ_{Op} du couple exercé par l'opérateur.
4) En déduire le travail W_{Op} fourni par l'opérateur pour réaliser la rotation de S.
Comparer W_{Op} à W_m. Expliquer pourquoi ce résultat était prévisible.

B- Action d'un champ magnétique variable sur une spire fixe

1) *Préliminaire*

Un petit aimant assimilable à un dipôle magnétique D de moment $\vec{m} = m\,\vec{u}_z$ et de masse M est accroché à l'extrémité d'un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0. On désigne par d la distance du point O au support (Figure 3). D peut se déplacer le long de l'axe vertical (Oz) créant ainsi un champ magnétique variable $\vec{B}_d$.

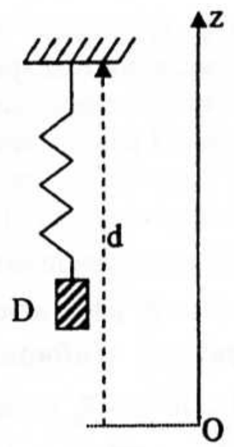

Figure 3

1.a) Par projection de la relation fondamentale de la dynamique appliquée à D sur l'axe (Oz), trouver l'équation du mouvement de D.
1.b) Simplifier l'équation obtenue en utilisant la condition d'équilibre et en introduisant l'élongation $Z = z - z_0$ comptée par rapport à la position d'équilibre z_0.
En déduire que D effectue indéfiniment, autour de sa position d'équilibre, des oscillations sinusoïdales de pulsation ω_0 que l'on déterminera.

La spire conductrice S de rayon *a*, d'axe de révolution vertical (Oz), de résistance électrique R et d'inductance propre L, initialement non parcourue par aucun courant, est désormais **fixe**.
S est totalement soumise à l'action du champ magnétique extérieur variable $\vec{B}_d$ créé par le dipôle D.
S sera alors parcouru par un courant *i(t)*.

Dans la suite, on étudie le système formé par D et S (Figure 4).

2) En utilisant l'expression du potentiel vecteur $\vec{A}_d$ créé par un dipôle magnétique, déterminer le flux Φ_d du champ $\vec{B}_d$ à travers S en fonction de m, z, a et μ_0.

3.a) Déterminer l'expression du flux total Φ à travers S.

3.b) En utilisant la loi de Faraday, trouver l'équation électrique (E1) de la spire.

On fera apparaître dans (E1) notamment la variable $\frac{dz}{dt}$ et la fonction

$$h(z) = -\frac{3}{2}\frac{\mu_0 m}{a^3}\frac{z}{(1+z^2/a^2)^{5/2}}.$$

4.a) Décrire brièvement l'origine de l'action de S sur D qu'on représente par la force $\vec{F}$.

4.b) Par projection de la relation fondamentale de la dynamique appliquée à D sur l'axe (Oz), montrer que l'équation mécanique (M1) qui régit le mouvement de D autour de sa position d'équilibre se met sous la forme :

$$M\frac{d^2Z}{dt^2} = -k\,Z + i\,h(z) \qquad \text{(M1)}$$

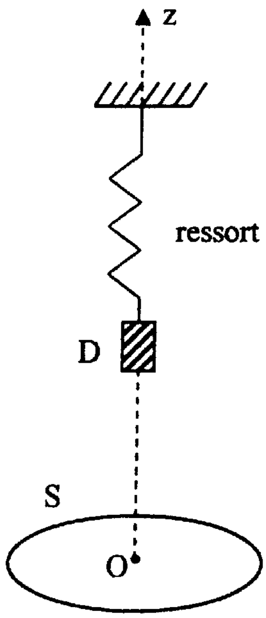

Figure 4

5) En combinant les équations (E1) et (M1), montrer qu'on fait apparaître un bilan énergétique dont on donnera la signification de chacun de ses termes. Commenter.

6) Décrire brièvement (sans aucun calcul) l'état final de D et de S tout en le justifiant.

7) On suppose que D effectue des petits mouvements autour de la position d'équilibre de façon à linéariser le système d'équations (E1) et (M1). On remplace donc la fonction h(z) par la constante $h_0 = h(z_0)$.

Pour une spire unique, on peut raisonnablement négliger la constante de temps $\tau = \frac{L}{R}$ devant un temps T caractéristique de l'évolution de $i(t)$ et de Z(t) ($\frac{di}{dt} << \frac{i}{\tau}$).

On néglige alors l'inductance propre L *de* S.

7.a) En utilisant les équations simplifiées de (E1) et de (M1) montrer qu'on a:

$$M\frac{d^2Z}{dt^2} + \frac{h_0^2}{R}\frac{dZ}{dt} + k\,Z = 0 \qquad \text{(E)}$$

On posera $\rho = \frac{h_0^2}{2MR}$ et $\omega_0^2 = \frac{k}{M}$.

7.b) En résolvant l'équation (E), montrer l'existence de trois régimes différents régissant l'évolution de Z(t). Donner la forme générale de la solution pour chaque régime.

En déduire l'état final de D et S.

Expliquer brièvement pourquoi l'état final de D en présence de S est différent de celui de D en l'absence de S.

Sachant qu'à t = 0, Z = 0 et $\frac{dZ}{dt} = V_0$, expliciter la solution dans le cas où $\rho < \omega_0$.

C- Transfert thermique

Le fil conducteur homogène constituant la spire S est au fait un cylindre indéformable, de rayon r, de section droite, de longueur L et d'axe (Oz). Il est constitué de cuivre de conductivité électrique γ et de conductivité thermique λ (γ et λ sont constantes).

Dans toute cette partie, on se place en régime *permanent* et on suppose que le transfert thermique par convection est négligeable. De plus, on suppose que le transfert thermique par conduction dans le conducteur se fait uniquement suivant l'axe (Oz).

1) On néglige le rayonnement thermique par le conducteur.

Les extrémités du conducteur d'abscisses $z = 0$ et $z = L$ sont maintenues respectivement aux températures T_0 et $T_L < T_0$.

1.a) En faisant un bilan d'énergie sur une tranche du conducteur de longueur dz, comprise entre les abscisses z et z + dz, établir l'équation de diffusion thermique.

En déduire la loi de variation de la température T(z) en un point d'abscisse z du conducteur.

Déterminer la résistance thermique R_t du conducteur.

1.b) Le fil conducteur est désormais parcouru par un courant permanent d'intensité I.

Que devient l'équation de diffusion thermique ?

2) On tient compte, en plus du transfert thermique par conduction, du transfert thermique par rayonnement à travers la surface latérale du conducteur. On suppose que le conducteur se comporte comme un corps noir.

Le conducteur est parcouru par un courant permanent d'intensité I.

En faisant un bilan d'énergie sur une tranche du conducteur de longueur dz, comprise entre les abscisses z et z + dz, établir l'équation de diffusion thermique.

Fin de l'épreuve