Corrigé. Math I , 2001

Partie I

1) On a $\quad D_a \subset C_a \subset D_{\sqrt{2}a}$

a) la fonction $e^{-x^2-y^2}$ est positive, intégrable sur $\mathbb{R}^2$; les inégalités

1 découlent des inclusions des domaines.

b) Le changement de variables en coordonnées polaires donne

$$\int_{D_a} e^{-x^2-y^2}dx\,dy = \frac{\pi}{2}\int_0^a re^{-r^2}dr = \frac{\pi}{4}(1-e^{-a^2}).$$

Ce qui entraine d'après a)

3 $$\frac{\pi}{4}(1-e^{-a^2}) \leq \int_{C_a} e^{-x^2-y^2}dx\,dy \leq \frac{\pi}{4}(1-e^{-2a^2}).$$

On fait tendre a vers $+\infty$, on obtient d'après les inégalités précédentes

$$\pi = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}dx\,dy = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx\right)^2$$

d'ou le résultat : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$.

1 2) a) Le changement de variables : $\xi = y - x$ donne le résultat.

b) Pour f paire, $u(-x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2}f(-x+\xi)\,d\xi = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2}f(x-\xi)\,d\xi$

1 $$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}f(x+y)\,dy = u(x)$$

Pour f impaire, $u(-x) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2}f(x-\xi)\,d\xi = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}f(x+y)\,dy$

$= -u(x)$

3 c) Pour $f(\xi)=\xi^m$, u est définie et on a

$$u(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2}(x+\xi)^m d\xi=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=0}^{m} C_m^k\, x^{m-k}\int_{-\infty}^{+\infty}\xi^k e^{-\xi^2}d\xi$$

avec $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2}\,\xi^k d\xi=\begin{cases}0, \text{ si } k \text{ est impair}\\ \frac{(2k'-1)!}{2^{2k'}\,k'!}\sqrt{\pi} \text{ si } k=2k'.\end{cases}$

donc $u(x)=\sum_{k'=0}^{m} C_m^{2k'}\frac{(2k'-1)!}{2^{2k'}\,k'!}\,x^{m-2k'}$, $0\le 2k'\le m$

Ainsi u est un polynome de degré m et de même parité que m.

---

1 d) Si f est convexe : $u(\lambda x+(1-\lambda)y)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2}f(\lambda x+(1-\lambda)y+\xi)d\xi$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2}f[\lambda(x+\xi)+(1-\lambda)(y+\xi)]d\xi\le\frac{\lambda}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\xi^2}f(x+\xi)d\xi+\frac{(1-\lambda)}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\xi^2}f(y+\xi)d\xi$$

$$=\lambda\, u(x)+(1-\lambda)\,u(y).$$

---

3 3) Soit $x_0\in\mathbb{R}$, il existe $a>0$ tel que $|x_0|<\frac{a}{2}$ et $\int_a^{+\infty}e^{-\xi^2}d\xi\le\frac{\varepsilon\sqrt{\pi}}{8\cdot(1+\|f\|_\infty)}$

où $\|f\|_\infty=\sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|$.

D'autre part, il existe $\eta>0$ tel que pour $|x|<a$ et $|x-x_0|<\eta$, $|\xi|<a$

$|f(x+\xi)-f(x_0+\xi)|<\varepsilon/2$. Ce qui donne.

$$|u(x)-u(x_0)|\le\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\xi^2}|f(x+\xi)-f(x_0+\xi)|d\xi$$

$$\le\frac{4}{\sqrt{\pi}}\|f\|_\infty\int_a^{+\infty}e^{-\xi^2}d\xi+\frac{\varepsilon}{2\sqrt{\pi}}\int_{-a}^{a}e^{-\xi^2}d\xi\le\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon$$

De plus, $|u(x)|\le\|f\|_\infty$.

---

1 4) a) l'inégalité est triviale.

2 — b) Si f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$, pour $\varepsilon>0$, il existe $\eta>0$ tel que pour $|x-y|<\eta$, alors $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$, ce qui entraîne $|u(x)-u(y)|<\varepsilon$ car $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2}d\xi = 1$.

---

1 — c) $$|u(x)-u(y)| = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2}|f(x+\xi)-f(x_0+\xi)|\,d\xi$$

$$\leq k|x-y| \quad \text{pour } f \text{ } k \text{ lipschitzienne.}$$

2,5 — 5) a) Il existe $A>0$ tel que $|f(x)|\leq |l|+1$ pour $|x|>A$

Posons $M=\max\left(|l|+1, \sup_{|x|\leq A}|f(x)|\right)$, on a $|f(x)|\leq M$.

---

2 — b) $$|u(x)-l| = \left|\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2}(f(x+\xi)-l)\,d\xi\right| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2}|f(x+\xi)-l|\,d\xi$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\delta}^{\delta} e^{-\xi^2}|f(x+\xi)-l|\,d\xi + \frac{4M}{\sqrt{\pi}}\int_{\delta}^{+\infty} e^{-\xi^2}d\xi.$$

2,5 — c) Il existe $\delta>0$ tel que $\frac{4M}{\sqrt{\pi}}\int_{\delta}^{+\infty} e^{-\xi^2}d\xi < \varepsilon/2$.

Il existe aussi $A>0$ tel que $|f(y)-l|<\frac{\varepsilon}{4\delta}$ pour $|y|>A$.

Soit $x\in\mathbb{R}$ tel que $|x|>\delta+A$, on aura pour $|\xi|\leq\delta$

$$|f(x+\xi)-l|<\frac{\varepsilon}{4\delta} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\delta}^{\delta} e^{-\xi^2}|f(x+\xi)-l|\,d\xi \leq \varepsilon/2,$$

d'où $\lim_{|x|\to\infty} u(x)=l$.

1,5 — 6) a) on a $|y-x|\geq |y|-|x|\geq 2r-r=r>|x|$, d'où $|y|\leq|x-y|+|x|\leq 2|x-y|$

---

1 — b) on obtient d'après a) : $-|x-y|^2\leq -\frac{y^2}{4}$ et $e^{-(y-x)^2}\leq e^{-\frac{y^2}{4}}$

d'autre part, on a toujours $e^{-(y-x)^2}\leq 1$.

c) Pour $n = 1$, on a $\frac{\partial}{\partial x}(e^{-(y-x)^2}) = -2(x-y)e^{-(y-x)^2}$

et $|-2(x-y)e^{-(y-x)^2}| \leq 2(x+|y|)\varphi(y)$

on prend alors $P_1(z) = 2z$.

Supposons que $\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}(e^{-z^2}) = \tilde{P}_{n-1}(z)e^{-z^2}$ avec $\deg \tilde{P}_{n-1} = n-1$.

En dérivant encore une fois, on aura

$$\frac{d^n}{dz^n}(e^{-z^2}) = \frac{d}{dz}\left(\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} e^{-z^2}\right) = \frac{d}{dz}\left(\tilde{P}_{n-1}(z)e^{-z^2}\right)$$

3,5 $$= [\tilde{P}'_{n-1}(z) - 2z\,\tilde{P}_{n-1}(z)]e^{-z^2} \text{ et } \tilde{P}_n = \tilde{P}'_{n-1}(z) - 2z\tilde{P}_{n-1}(z)$$

est bien un polynome de degré n. Si $\tilde{P}_n(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i$,

on prend $P_n(z) = \sum_{i=0}^{n} |a_i| z^i$, on a $|\tilde{P}_n(z)| \leq P_n(|z|)$.

on obtient alors:

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n}(e^{-(y-x)^2}) = P_n(r+|y|)\varphi(y).$$

2,5 7) D'après la question précédente et le théorème de dérivation sous le signe somme, u est alors de classe C^∞ pour f continue bornée.

Partie II

1) a) Le changement de variables $y = \frac{x}{\sqrt{4\pi t}}$ donne :

1 $$\int_{-\infty}^{+\infty} g_t(x)dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}dy = 1.$$

---

b) $\lim_{t \to 0^+}\int_{\delta}^{+\infty} g_t(x)dx = \lim_{t\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{\delta}{2\sqrt{t}}}^{+\infty} e^{-y^2}dy = 0$ car e^{-y^2} est

1,5 intégrable au voisinage de $+\infty$.

---

2 c) $\frac{\partial^2}{\partial x^2}(g_t(x)) = \left(-\frac{1}{2t} + \frac{x^2}{4t^2}\right)g_t(x) = \frac{\partial}{\partial t}g_t(x)$

2) Pour $t>0$, $\hat{g}_t$ est bien définie car g_t est intégrable dans $\mathbb{R}$.

1 a) Comme g_t est paire, on a $\int_{-\infty}^{+\infty} g_t(y)\sin(xy)\,dy = 0$

et par suite $\hat{g}_t(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_t(y)\cos(xy)\,dy$

---

b) Pour t fixé >0, le théorème de dérivation sous le signe

1,5 somme permet d'affirmer que $\hat{g}_t(x)$ est bien dérivable comme fonction de x et

$$\hat{g}_t'(x) = -\int_{-\infty}^{+\infty} g_t(y)\, y \sin(xy)\,dy = -\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty} y\, e^{-\frac{y^2}{4t}} \sin(xy)\,dy$$

$$= -2tx\,\hat{g}_t(x) \quad \text{(après une intégration par parties).}$$

D'autre part, $\hat{g}_t(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_t(y)\,dy = 1$.

---

1 c) La solution de l'equation différentielle est λe^{-tx^2}, $x\in\mathbb{R}$,

la condition $\hat{g}_t(0) = 1$ entraine $\lambda = 1$ et $\hat{g}_t(x) = e^{-tx^2}$.

---

3) a) $\int_{-\infty}^{+\infty} g_t(y)\, e^{-\lambda y}\,dy$ est bien définie pour tout $\lambda\in\mathbb{C}$.

4 $$= \frac{e^{a^2t}}{\sqrt{4\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(y+2at)^2}{4t}}\, e^{-iby}\,dy = \frac{e^{a^2t+2iabt}}{\sqrt{4\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{4t}-iby}\,dy$$

$$= e^{a^2t+2iabt-b^2t} = e^{\lambda^2 t}.$$

---

b) $\int_{-\infty}^{+\infty} g_t(y)\cos(x-y)\,dy = e^{-t}\cos x$, $\int_{-\infty}^{+\infty} g_t(y)\sin(x-y)\,dy = e^{-t}\sin x$,

4 $\int_{-\infty}^{+\infty} g_t(y)\,\mathrm{ch}(x-y)\,dy = e^{t}\,\mathrm{ch}\,x$, $\int_{-\infty}^{+\infty} g_t(y)\,\mathrm{sh}(x-y)\,dy = e^{t}\,\mathrm{sh}\,x$.

4) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g_t(x-y)\, g_s(y)\, dy = \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{4\pi\sqrt{st}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(s+t)y^2-2sxy}{4st}}\, dy$

$$= e^{-\frac{x^2}{4t}+\frac{s x^2}{4t(s+t)}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4\pi\sqrt{st}}\, e^{-\frac{s+t}{4st}\left(y-\frac{s}{s+t}x\right)^2} dy$$

6 $$= e^{-\frac{x^2}{4(s+t)}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4\pi\sqrt{st}}\, e^{-\frac{s+t}{4st}y^2} dy = \frac{1}{\sqrt{4\pi(s+t)}}\, e^{-\frac{x^2}{4(s+t)}}$$

$$= g_{t+s}(x) .$$

Partie III

1° a) La série de terme général $g_t(x+2m\pi)$ est uniformément convergente et puisque $g_t(x+2m\pi)$ est continue, alors $q_t(x)$ est continue.

4 $$q_t(-x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} g_t(-x+2m\pi) = \sum_{-\infty}^{+\infty} g_t(x-2m\pi) = q_t(x)$$

$$q_t(x+2\pi) = \sum_{-\infty}^{+\infty} g_t(x+2(m+1)\pi) = \sum_{-\infty}^{+\infty} g_t(x+2m\pi) = q_t(x) .$$

1 b) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} q_t(x)\, dx = \sum_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} g_t(x+2m\pi)\, dx = \sum_{-\infty}^{+\infty} \int_{(2m-1)\pi}^{(2m+1)\pi} g_t(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} g_t(x)\, dx = 1 .$

c) q_t est paire, donc $b_n = 0$, $a_0 = \frac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} q_t(x)\, dx = 1$ (d'après b).

3 $$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} q_t(x)\cos(nx)\, dx = \frac{1}{\pi} \sum_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\, e^{-\frac{(x+2m\pi)^2}{4t}} \cos(nx)\, dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} g_t(y)\cos(ny)\, dy = \frac{1}{\pi} e^{-n^2 t} \quad \text{(d'après 3° a II)}$$

1 d) q_t est continue, la série de Fourier converge vers q_t sur $\mathbb{R}$, donc

$$q_t(x) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 t}\cos nx$$

2) $p_t(x,y) = q_t(x-y) - q_t(x+y)$ est bien définie en : $x-y$ et $x+y \in [-\pi,\pi]$ de plus $p_t(x,y)$ est continue comme fonction de (x,y). La série de Fourier qui donne q_t est normalement convergente, on peut alors regrouper les termes et écrire :

1 a) $p_t(x,y) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2t}(\cos n(x-y) - \cos n(x+y)) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2t}\sin nx \sin ny$

b) $$\int_0^{\pi} p_t(x,y)\sin(py)\,dy = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\pi} e^{-n^2t}\sin(nx)\sin(ny)\sin(py)\,dy$$

2 $$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e^{-n^2t}\sin(px)\sin^2(py)\,dy = e^{-p^2t}\sin(px).$$

3) On peut permuter $\int$ et Σ et écrire

3 $$\int_0^{\pi} p_t(x,z)\,p_s(z,y)\,dz = \frac{4}{\pi^2}\sum_{m,n=1}^{\infty}\int_0^{\pi} e^{-(n^2t+m^2s)}\sin(nx)\sin(my)\sin(nz)\sin(mz)\,dz$$

or $\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(nz)\sin(mz)\,dz = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ 1 & \text{si } n = m \end{cases}$. Ainsi l'expression se réduit à

$$\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2(s+t)}\sin(nx)\sin(ny) = p_{t+s}(x,y)$$

4) $$\int_{\varepsilon}^{+\infty} p_t(x,y)\,dt = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\varepsilon}^{+\infty} e^{-n^2t}\sin(nx)\sin(ny)\,dt = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\varepsilon t}\frac{\sin(nx)\sin(ny)}{n^2}$$

2,5 Comme cette dernière série est convergente, on peut faire tendre ε vers 0 et obtenir

$$\int_0^{+\infty} p_t(x,y)\,dt = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)\sin(ny)}{n^2} = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n(x-y) - \cos n(x+y)}{n^2}$$

5) a) h est 2π périodique, continue sur $\mathbb{R}$, paire

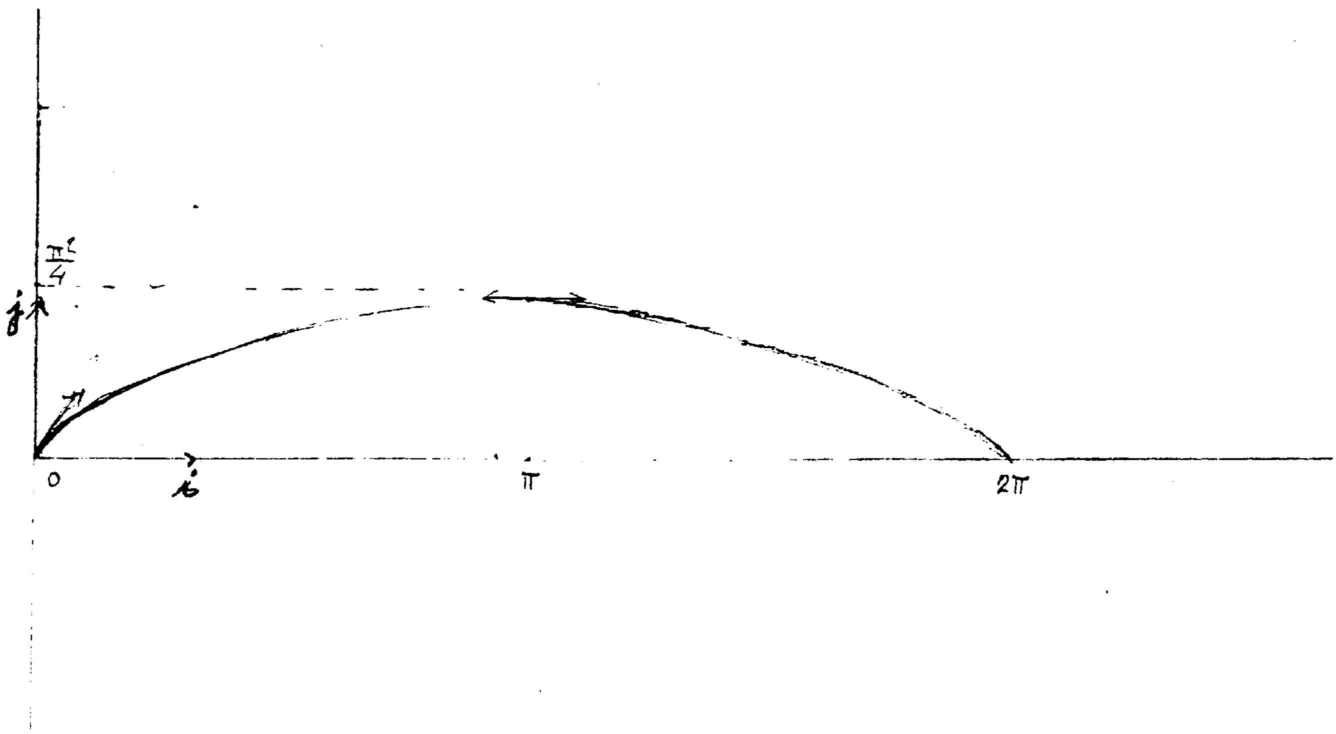
De plus $h(2\pi-x) = \frac{\pi}{2}(2\pi-x) - \frac{(2\pi-x)^2}{4} = \frac{\pi}{2}x - \frac{x^2}{4} = h(x)$

on fait l'étude sur $[0,\pi]$ et on complète par symétrie par rapport à l'axe $x=\pi$

$h'(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} = \frac{\pi - x}{2} \geq 0$ pour $x \in [0,\pi]$

$h(0)=0$, $h(\pi) = \frac{\pi^2}{4}$ et par suite $h(2\pi) = 0$

x	0		π
$h'(x)$		$+$	0
$h(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{\pi^2}{4}$



3 $a_0 = \frac{\pi^2}{6}$, $a_n = -\frac{1}{n^2}$, $b_n = 0$. La série est convergente pour tout $x \in \mathbb{R}$, en particulier pour $x \in [0, 2\pi]$, on a

$$\frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} = \frac{\pi}{2}x - \frac{x^2}{4}$$, donc on obtient pour $x \in [0, 2\pi]$:

1 b) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi}{2}x + \frac{x^2}{4}.$$

2,5 6) D'après 4) on a $\int_0^\infty P_t(x,y)\,dt = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\left[\cos n(x-y) - \cos n(x+y)\right]$.

En utilisant b), on obtient

$$\int_0^\infty P_t(x,y)\,dt = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\left(\cos n|x-y| - \cos n(x+y)\right) = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\pi}{2}|x-y| + \frac{(x-y)^2}{4}\right.$$

$$\left. + \frac{\pi}{2}(x+y) - \frac{(x+y)^2}{4}\right] = \frac{1}{\pi}\left[\left(\frac{x+y}{2} - \frac{|x-y|}{2}\right)\pi + \left(\frac{|x-y|}{2} - \frac{(x+y)}{2}\right)\left(\frac{|x-y| + (x+y)}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{x+y}{2} - \frac{|x-y|}{2}\right]\left[\pi - \frac{x+y+|x-y|}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{\pi} \min(x,y) \times (\pi - \max(x,y)).$$

1 7) a) $$v(x) = \int_0^x G(x,y) f(y)\,dy + \int_x^\pi G(x,y) f(y)\,dy = \frac{\pi - x}{\pi}\int_0^x y f(y)\,dy + \frac{x}{\pi}\int_x^\pi (\pi - y) f(y)\,dy$$

b) Pour f continue, $\int_0^x y f(y)\,dy$ et $\int_x^\pi (\pi-y) f(y)\,dy$ sont dérivables

2,5 $$v'(x) = -\frac{1}{\pi}\int_0^x y f(y)\,dy + \frac{\pi - x}{\pi} x f(x) + \frac{1}{\pi}\int_x^\pi (\pi - y) f(y)\,dy - \frac{x}{\pi}(\pi - x) f(x)$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_0^x y f(y)\,dy + \frac{1}{\pi}\int_x^\pi (\pi - y) f(y)\,dy$$

De nouveau, v' est aussi dérivable et $v''(x) = -\frac{x}{\pi} f(x) - \frac{\pi - x}{\pi} f(x) = -f$

De plus $v(0) = v(\pi) = 0$.

or l'equation différentielle

$$\begin{cases} y'' = -f \\ y(0) = y(\pi) = 0 \end{cases}$$

admet une solution unique, donc v est la seule solution.

---

c) Il est clair que $G(x,y) = \frac{1}{\pi}\min(x,y)\times(\pi-\max(x,y))$

$$\leq \frac{x(\pi-x)}{\pi}$$

car $\min(x,y) \leq x$ et $\max(x,y) \geq x$.

2 D'autre part, on a : $\min(x,y) \geq \frac{xy}{\pi}$ et $\pi - \max(x,y) \geq \frac{(\pi-x)(\pi-y)}{\pi}$

d'ou $G(x,y) = \frac{1}{\pi}\min(x,y)\cdot(\pi-\max(x,y)) \geq \frac{x(\pi-x)\,y(\pi-y)}{\pi^3}$.

---

d) Comme f est positive, on obtient d'après c) et par intégration

1 $$\frac{x(\pi-x)}{\pi^3}\int_0^\pi y(\pi-y)f(y)\,dy \leq v(x) \leq \frac{x(\pi-x)}{\pi}\int_0^\pi f(y)\,dy.$$

---

8) a) si $\lambda<0$, la solution est $z = ae^{-\sqrt{-\lambda}x} + be^{\sqrt{-\lambda}x}$ et $z(0) = z(\pi) = 0$

entrainent $a = b = 0$. De même si $\lambda = 0$, $z'' = 0$ et $z(0) = z(\pi) = 0$

3 donnent $z = 0$.

si $\lambda > 0$, $z = a\cos\sqrt{\lambda}x + b\sin\sqrt{\lambda}x$, $z(0) = 0$ est équivalente

à $a = 0$ et $z(\pi) = 0$ équivaut $\sqrt{\lambda} \in \mathbb{N}^*$ donc $\lambda = n^2$

donc $z = b\sin(nx)$, $x \in [0,\pi]$, $n \in \mathbb{N}^*$

---

b) La fonction $v(x) = n^2\int_0^\pi G(x,y)\sin(ny)\,dy$ est l'unique

1,5 solution de l'équation différentielle

$$\begin{cases} y''(x) = -n^2\sin(nx) \\ y(0) = y(\pi) = 0 \end{cases}$$

et $\sin(nx)$ vérifie aussi cette équation, d'ou l'égalité demandée

c) on considère la fonction $f(x) = \frac{\sin(x)}{x(\pi - x)}$, $x \in]0, \pi[$

$f(0) = f(\pi) = \frac{1}{\pi}$. f est continue, strictement positive sur $[0,\pi]$

donc $C_1 = \min_{x \in [0,\pi]} f(x)$, $C_2 = \max_{x\in[0,\pi]} f(x)$ sont strictement

1 positifs et répondent à la question.

---

9) a) on a $C_1 \leq f(0) = \frac{1}{\pi}$ et $C_2 \geq f(\frac{\pi}{2}) = \frac{4}{\pi^2}$ où f est

2 la fonction définie dans 8-c.

---

b) on fait l'etude de la fonction $f(x) = \frac{\sin x}{x(\pi - x)}$, $x \in]0, \pi[$

et $h(0) = h(\pi) = \frac{1}{\pi}$.

h est continue sur $[0, \pi]$, $f(\pi - x) = f(x)$, on fait l'étude sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et on complète par symétrie par rapport à la dreite $x = \frac{\pi}{2}$.

3,5 f est dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}]$, $f'(x)$ est du signe de

$$g(x) = x(\pi - x)\cos x - (\pi - 2x)\sin x \quad , \quad g(0) = 0$$

et $g'(x) = (2 - x(\pi - x))\sin x \geq 0$ donc $g(x) \geq 0$ pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

donc f est croissante. Ainsi on obtient

$$\frac{1}{\pi} = f(0) \leq f(x) \leq f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4}{\pi^2}.$$

Ce qui prouve

$$\frac{1}{\pi} \leq \frac{\sin x}{x(\pi - x)} \leq \frac{4}{\pi^2}.$$