

Concours Mathématiques-Physique et Physique-Chimie  
Epreuve de Sciences et Techniques de l'Ingénieur

Date : Lundi 11 juin 2001

Heure : 8 H

Durée : 3 H

Nombre de pages : 12

Barème : Partie A : 5 points

Partie B : 10 points

Partie C : 5 points

**Remarques :**

- 1/ Les parties A, B et C sont indépendantes et doivent être rédigées sur des feuilles séparées.
- 2/ Les documents réponses (pages 2/12, 3/12 et 4/12) sont à rendre en fin d'épreuve.

**PRESSE DE FORGEAGE**



**Présentation**

La figure 1 (page 11/12) représente le dessin d'ensemble simplifié d'une presse de forgeage dont le schéma cinématique minimal est illustré par la figure 2 (page 12/12). Les principaux éléments de cette presse sont :

- le bâti (0)
- l'arbre d'entrée (1) en liaison pivot d'axe  $(O, \vec{Z}_0)$  avec le bâti
- la bielle (2) en liaison pivot d'axe  $(A, \vec{Z}_0)$  avec le bâti, et reliée à l'arbre d'entrée (1) par l'intermédiaire du solide (S)
- le solide (S) en liaison glissière avec la bielle (2) d'axe  $(A, \vec{X}_2)$  et en liaison rotule de centre P avec l'arbre d'entrée (1)
- le levier (4) en liaison pivot d'axe  $(B, \vec{Z}_0)$  avec le bâti
- le coulisseau porte marteau (5) en liaison linéaire annulaire d'axe  $(F, \vec{X}_4)$  avec le levier (4) et en liaison glissière d'axe  $(C, \vec{Y}_0)$  avec le bâti (0).

Le levier (4) et la bielle (2) sont reliés entre eux par un élément élastique formé de deux ressorts identiques et du support de guidage (3). Ce support est en liaison pivot d'axe  $(D, \vec{Z}_0)$  avec le levier (4), il est également en liaison linéaire annulaire d'axe  $(E, \vec{Y}_3)$  avec la bielle (2).

**Principe de fonctionnement**

La rotation imposée à l'arbre d'entrée (1) par le moteur non représenté (M) est transformée au moyen du solide (S) en mouvement d'oscillation de la bielle (2). Ce mouvement est transmis par l'intermédiaire de l'élément élastique (les deux ressorts + le support de guidage (3)) au levier (4) et par la suite au coulisseau porte marteau (5) qui assure le forgeage de la pièce désirée.

## Partie B : ETUDE MECANIQUE

Dans cette partie on se reportera à la figure 2 (page 12/12)

### Repères et paramétrage

Les repères et les paramètres adoptés pour le mécanisme sont définis comme suit :

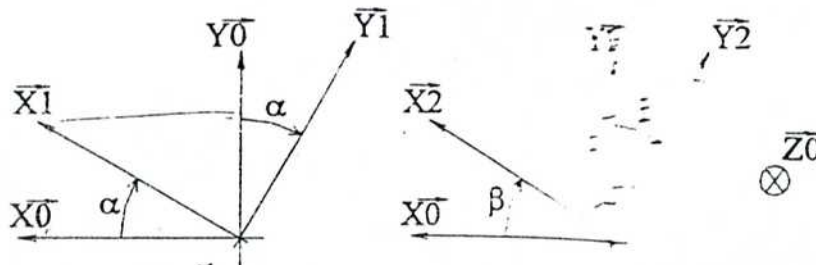
- $R_0(O, \vec{X}_0, \vec{Y}_0, \vec{Z}_0)$  repère lié au bâti (0) supposé galiléen,
- $R_1(O, \vec{X}_1, \vec{Y}_1, \vec{Z}_0)$  repère lié à l'arbre d'entrée (1), tel que :  $\alpha = \angle(\vec{X}_1, \vec{X}_0) = \angle(\vec{Y}_0, \vec{Y}_1)$  ;
- $R_2(A, \vec{X}_2, \vec{Y}_2, \vec{Z}_0)$  repère lié à la bielle (2), tel que :  $\beta = \angle(\vec{X}_2, \vec{X}_0) = \angle(\vec{Y}_0, \vec{Y}_2)$  ;
- $R_3(D, \vec{X}_3, \vec{Y}_3, \vec{Z}_0)$  repère lié au support de guidage (3), tel que :  $\theta = \angle(\vec{X}_3, \vec{X}_0) = \angle(\vec{Y}_0, \vec{Y}_3)$  ;
- $R_4(B, \vec{X}_4, \vec{Y}_4, \vec{Z}_0)$  repère lié au levier (4), tel que :  $\gamma = \angle(\vec{X}_4, \vec{X}_0) = \angle(\vec{Y}_0, \vec{Y}_4)$  ;

Les positions des différents centres de liaison sont décrites par les relations vectorielles suivantes :

$$\begin{aligned} \vec{OA} &= -a\vec{X}_0 + b\vec{Y}_0, \quad \vec{BC} = c\vec{X}_0, \quad \vec{OP} = r\vec{Y}_1, \quad \vec{AP} = (L_1 + L_2)\vec{X}_2, \quad \vec{AE} = 2L_2\vec{X}_2, \\ \vec{ED} &= (y + L_0)\vec{Y}_3, \quad \vec{BD} = L_4\vec{X}_4, \quad \vec{BF} = (\mu - L_3)\vec{X}_4, \quad \vec{CF} = \eta\vec{Y}_0 \end{aligned}$$

Les angles  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\theta$  et  $\gamma$  sont les paramètres de rotation du mécanisme. Quant aux paramètres de translation ils sont définis par :  $y$ ,  $\lambda$ ,  $\mu$  et  $\eta$  où  $y$  est l'allongement de l'un des deux ressorts (les ressorts sont complètement relâchés à  $y=0$ ).

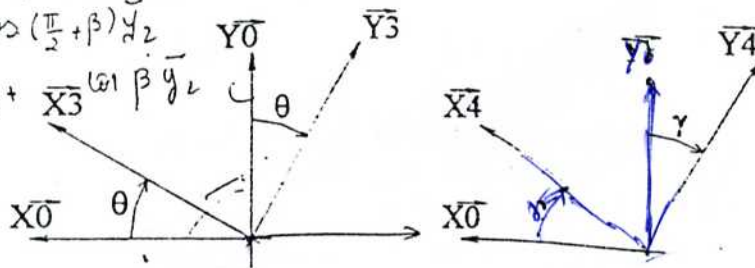
Les caractéristiques géométriques :  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $L_0$ ,  $L_2$ ,  $L_4$  et  $r$  du mécanisme sont constantes.



$$\vec{x}_1 = \cos \alpha \vec{x}_0 + \sin(\pi/2 - \beta) \vec{y}_0 =$$

$$\vec{x}_2 = \cos \beta \vec{x}_0 + \sin(\pi/2 + \beta) \vec{y}_2$$

$$\vec{y}_1 = \sin(\pi/2 - \beta) \vec{x}_2 + \vec{x}_3 \cos \beta \vec{y}_2$$



$$\begin{cases} \cos(\pi/2 - \beta) = \sin \beta \\ \cos(\pi/2 + \beta) = -\sin \beta \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{\pi}{6} \\ \cos(\pi/2 - \beta) &= 0.5 = \sin \beta \\ \sin \beta &= 0.5 \end{aligned}$$



## Partie B-I : CINEMATIQUE

Les centres d'inertie du levier (4) et du coulisseau (5) sont respectivement  $G_4$  et  $G_5$ .  $G_4$  est confondu avec le point D.

I-1. Déterminer les vecteurs rotations instantanées par rapport au bâti (0) des solides suivants :

- 1.a/ arbre d'entrée (1);
- 1.b/ bielle (2);
- 1.c/ support de guidage (3);
- 1.d/ levier (4);

I-2. Calculer les vecteurs vitesses suivants :

- 2.a/  $\vec{V}(P \in 1/R_0)$  l'exprimer dans la base  $(\vec{X}_1, \vec{Y}_1, \vec{Z}_0)$ ;
- 2.b/  $\vec{V}(P \in 2/R_0)$  et  $\vec{V}(E \in 2/R_0)$  les exprimer dans la base  $(\vec{X}_2, \vec{Y}_2, \vec{Z}_0)$ ;
- 2.c/  $\vec{V}(D \in 4/R_0)$  l'exprimer dans la base  $(\vec{X}_4, \vec{Y}_4, \vec{Z}_0)$ ;
- 2.d/  $\vec{V}(E \in 3/R_0)$  l'exprimer dans la base  $(\vec{X}_3, \vec{Y}_3, \vec{Z}_0)$  (on utilisera  $\vec{V}(D \in 4/R_0)$ );

I-3. Calculer les vecteurs accélérations suivants :

- 3.a/  $\vec{\Gamma}(G_4/R_0)$  l'exprimer dans la base  $(\vec{X}_4, \vec{Y}_4, \vec{Z}_4)$ ;
- 3.b/  $\vec{\Gamma}(G_5/R_0)$  l'exprimer dans la base  $(\vec{X}_0, \vec{Y}_0, \vec{Z}_0)$ .

## Partie B-II : ENERGETIQUE

On considère le sous ensemble  $\{E_1\}$  formé de l'arbre d'entrée (1), du solide intermédiaire (S) et de la bielle (2).

Les caractéristiques d'inertie des éléments constitutifs de  $\{E_1\}$  sont les suivantes :

• arbre d'entrée (1)

- matrice d'inertie au point O exprimée dans la base  $(\vec{X}_1, \vec{Y}_1, \vec{Z}_0)$  est de la forme :

$$I_O(1) = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & -D_1 \\ 0 & -D_1 & C_1 \end{bmatrix}$$

- masse  $M_1$ , centre d'inertie  $G_1$ , tel que :  $\vec{OG}_1 = y_1 \vec{Y}_1 + z_1 \vec{Z}_0$

• bielle (2)

- moment d'inertie par rapport à l'axe  $(A, \vec{Z}_0)$   $I_2$  masse  $M_2$
- centre d'inertie  $G_2$ , tel que :  $\vec{AG}_2 = x_2 \vec{X}_2$   $\vec{AG}_2 = x_2 \vec{X}_2$

• levier (4)

- moment d'inertie par rapport à l'axe  $(B, \vec{Z}_0)$   $I_4$  masse  $M_4$

• coulisseau porte marteau (5), masse  $M_5$

- solide intermédiaire (S)
- masse et inertie négligeables

(A) L'arbre d'entrée est soumis à un couple  $\vec{C}_m = C_m \vec{Z}_0$ . L'action de rappel des ressorts sur la bielle (2), au point E, est de la forme :  $\vec{F}_r = 2ky \vec{Y}_3$ , où  $k$  est la raideur de l'un des ressorts. L'action du support de guidage (3) sur la bielle au point E est représentée par le torseur :

$$\{\tau_{3/2}\}_E = \begin{Bmatrix} \vec{F}_E = X_E \vec{X}_3 \\ \vec{M}_E = 0 \end{Bmatrix}$$

L'accélération de la pesanteur est :  $\vec{g} = -g \vec{Y}_0$

Pour simplifier les calculs on admettra que toutes les liaisons sont parfaites.

II.1 Calculer relativement au repère galiléen  $R_0(O, \vec{X}_0, \vec{Y}_0, \vec{Z}_0)$  l'énergie cinétique de  $\{E_1\}$ .

II.2 Faire l'inventaire et le bilan des actions extérieures appliquées à  $\{E_1\}$ .

II.3 Calculer la puissance de toutes les actions extérieures et intérieures appliquées à  $\{E_1\}$  dans son mouvement par rapport à  $R_0(O, \vec{X}_0, \vec{Y}_0, \vec{Z}_0)$ .

II.4 Ecrire la relation qui découle du théorème de l'énergie cinétique appliqué à  $\{E_1\}$  dans son mouvement par rapport à  $R_0(O, \vec{X}_0, \vec{Y}_0, \vec{Z}_0)$ .

### Partie B-III : DYNAMIQUE

L'action du bâti sur le levier (4) au point B est représentée par le torseur :

$$\{\tau_{0/4}\}_B = \begin{Bmatrix} \vec{F}_B = X_B \vec{X}_0 + Y_B \vec{Y}_0 + Z_B \vec{Z}_0 \\ \vec{M}_B = L_B \vec{X}_0 + M_B \vec{Y}_0 \end{Bmatrix} \quad \text{pivot}$$

L'action de la pièce à forger sur le coulisseau porte marteau (5) est représentée par :  $\vec{F}_0 = F_0 \vec{Y}_0$

III.1 L'élément élastique (support (3) + les 2 ressorts) est supposé de masse et d'inertie négligeables.

1.a/ Ecrire les équations qui découlent du théorème de la résultante dynamique appliqué à l'élément élastique dans son mouvement par rapport à  $R_0(O, \vec{X}_0, \vec{Y}_0, \vec{Z}_0)$ ;

1.b/ Ecrire les équations qui découlent du théorème du moment dynamique appliqué à l'élément élastique dans son mouvement par rapport à  $R_0(O, \vec{X}_0, \vec{Y}_0, \vec{Z}_0)$ ;

1.c/ Déterminer en fonction de  $k$  et  $y$ , l'action en D du levier sur l'élément élastique, ainsi que la composante de force  $X_E$ .

III.2 On considère le sous ensemble  $\{E_2\}$  formé du levier (4) et du coulisseau porte marteau (5)

2.a/ Faire l'inventaire et le bilan de toutes les actions extérieures appliquées à  $\{E_2\}$ ;

2.b/ Appliquer le théorème de la résultante dynamique en projection sur  $\vec{Y}_0$  à  $\{E_2\}$  dans son mouvement par rapport à  $R_0(O, \vec{X}_0, \vec{Y}_0, \vec{Z}_0)$ .

## Partie C : AUTOMATIQUE

N.B. : On présentera les résultats sous forme littérale avant d'effectuer l'application numérique.  
L'objet de l'étude suivante est l'analyse du comportement en vitesse du moteur dont le schéma fonctionnel est donné par la figure suivante :

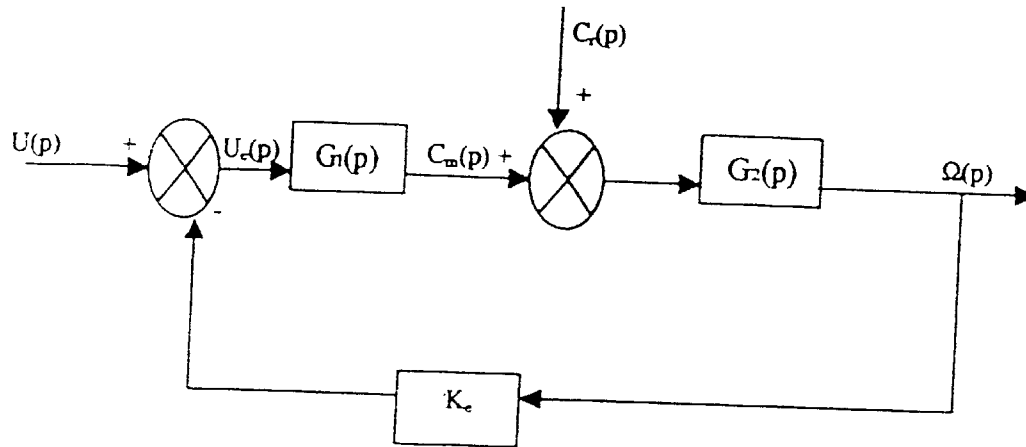
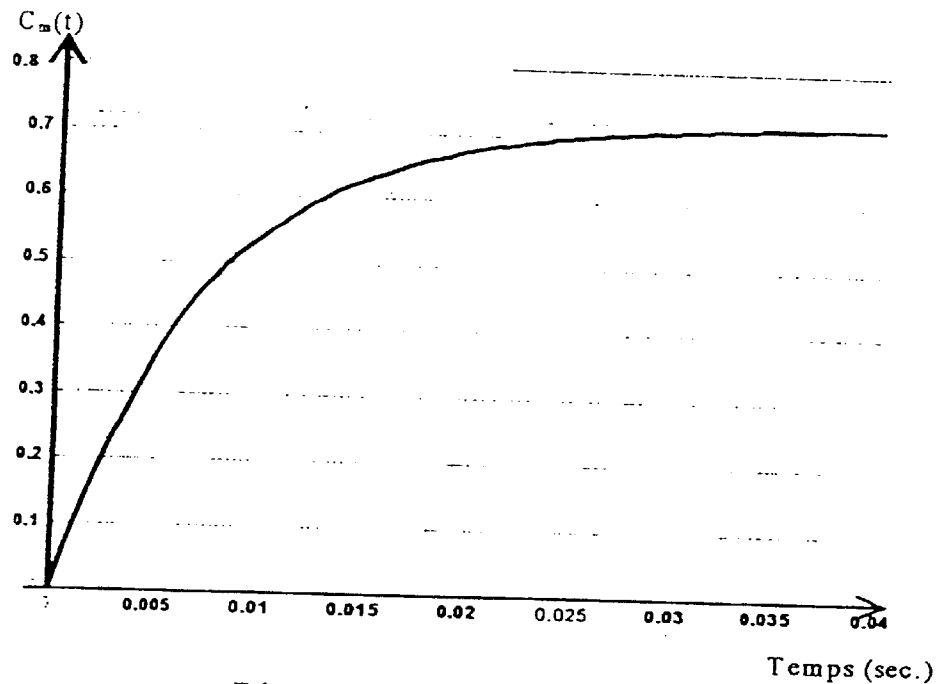


Schéma fonctionnel du moteur

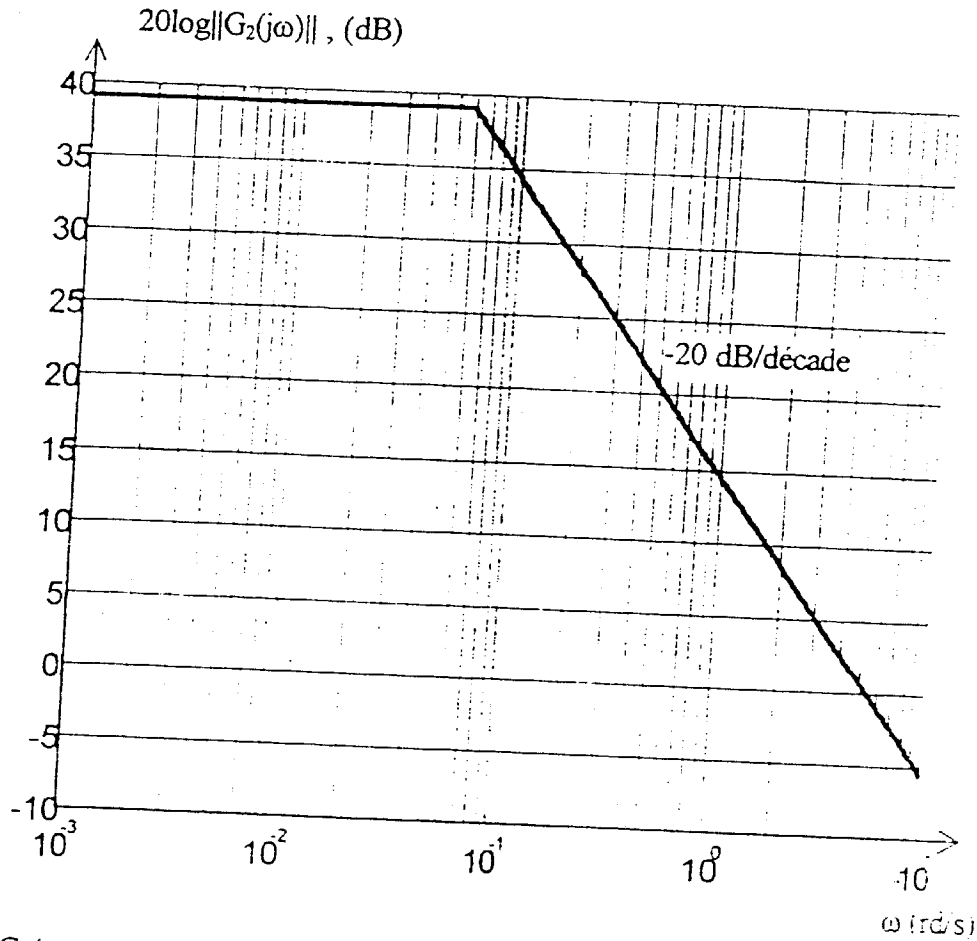
### Partie C-I : DETERMINATION DES PARAMETRES DU MOTEUR

I.1 Déterminer  $G_1(p)$  sachant que la réponse  $C_m(t)$  à la grandeur  $U_e$  en échelon unitaire est représentée par la figure ci-dessous :



Réponse indicielle de  $G_1(p)$

I.2 Le diagramme asymptotique de Bode (courbe d'amplitude) de la fonction de transfert  $G_2(p)$  est donné par la figure suivante :



Déterminer  $G_2(p)$ .

I.3 Le moteur est maintenant décrit par le schéma fonctionnel suivant :

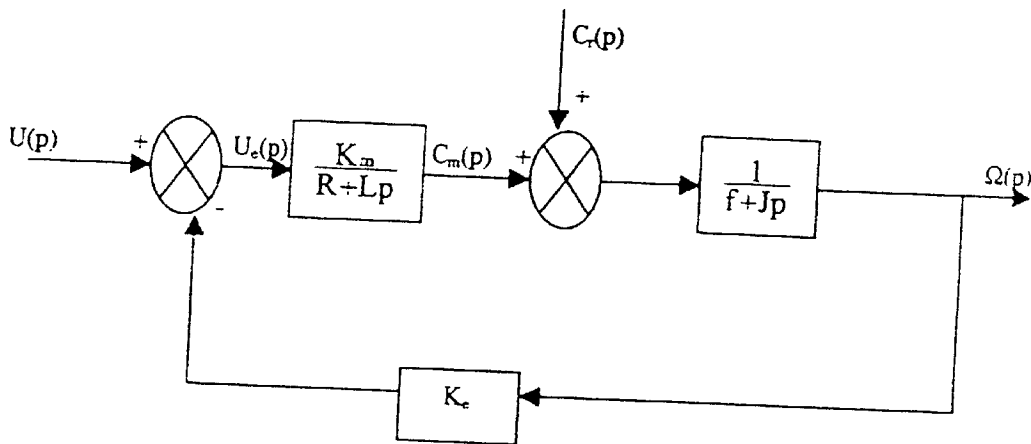
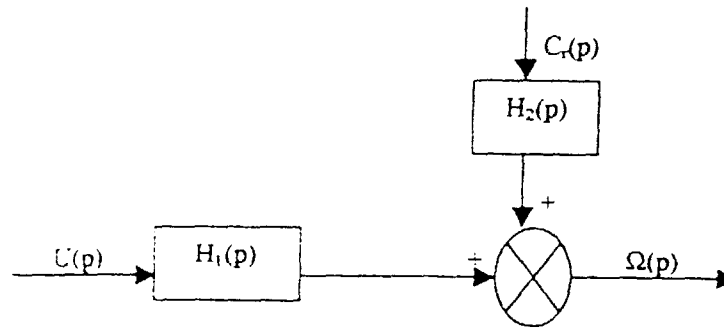


Schéma fonctionnel du moteur

Avec :

$U$	: Tension d'alimentation du moteur;	$L$	: Inductance aux bornes de l'induit;
$\Omega$	: Vitesse de rotation de l'arbre du moteur;	$J$	: Inertie totale sur l'arbre du moteur;
$C_m$	: Couple moteur;	$K_m$	: Constante du couple;
$C_r$	: Couple résistant;	$K_e$	: Constante de force contre électromotrice.
$R$	: Résistance aux bornes de l'induit;	$f$	: Coefficient de frottement visqueux.

3.a/ En deduire des questions I.1 et I.2, pour  $R=1,15 \text{ Ohm}$ , les paramètres du moteur  $K_m$ ,  $L$ ,  $f$  et  $J$ .  
 3.b/ Mettre le schéma fonctionnel du moteur sous la forme suivante :



## Partie C-II : REGULATION DE LA VITESSE

Le système règle est donné par le schéma ci-dessous :

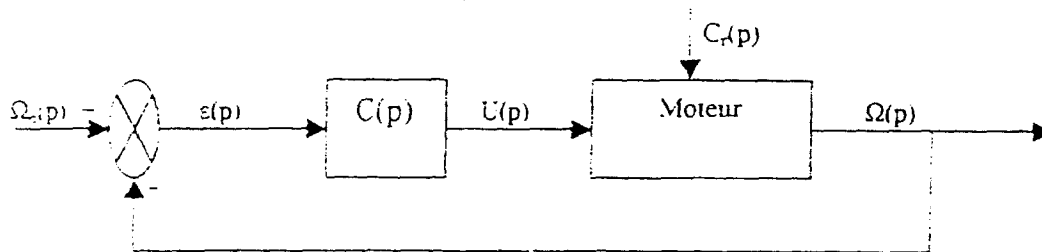


Schéma d'asservissement de la vitesse

$\Omega_c$  étant la vitesse de consigne. Dans la suite on prendra :  $L=8,3 \cdot 10^{-3} \text{ H}$ ;  $f=0,011$ ;  $J=191 \cdot 10^{-3} \text{ Kg.m}^2$ ;  $K_m=0,83 \text{ N.m/A}$ ;  $K_e=0,47 \text{ V.s/rd}$ ;  $R=1,15 \text{ Ohm}$ .

II.1 On considère que le correcteur proportionnel  $C(p)=K_a$

1.a/ Déterminer la valeur de  $K_a$  permettant d'avoir une erreur statique égale à 5% pour un échelon de  $\Omega_c$  d'amplitude 100 rd/s et un couple résistant nul.

1.b/ Pour la même valeur de  $K_a$ , trouvée dans la question 1.a/, calculer l'erreur statique pour une grandeur d'entrée  $\Omega_c$  en échelon d'amplitude 100 rd/s et une grandeur d'entrée  $C_r$  en échelon d'amplitude 10 N.m.

II.2 On se propose maintenant d'étudier l'asservissement avec un correcteur proportionnel intégral de la forme :  $C(p)=K_b + \frac{K_i}{p}$

2.a/ Donner les conditions que doivent vérifier les paramètres  $K_b$  et  $K_i$  pour que le système en boucle fermée soit stable;

2.b/ Tracer la courbe  $K_i=f(K_b)$  représentant le domaine de stabilité obtenu à la question 2.a/;

2.c/ Calculer l'erreur statique pour une grandeur d'entrée  $\Omega_c$  en échelon d'amplitude 100 rd/s et une grandeur d'entrée  $C_r$  en échelon d'amplitude 10 N.m. Conclure;

2.d/ Dans la suite, on néglige l'inductance du moteur. Montrer que l'équation caractéristique du système en boucle fermée peut s'écrire sous la forme :

$$p^2 + 2.m.\omega_0.p + \omega_0^2 = 0$$

Déterminer  $K_b$  et  $K_i$  pour avoir  $m=\frac{\sqrt{2}}{2}$  et  $\omega_0=2\text{rd/s}$ .

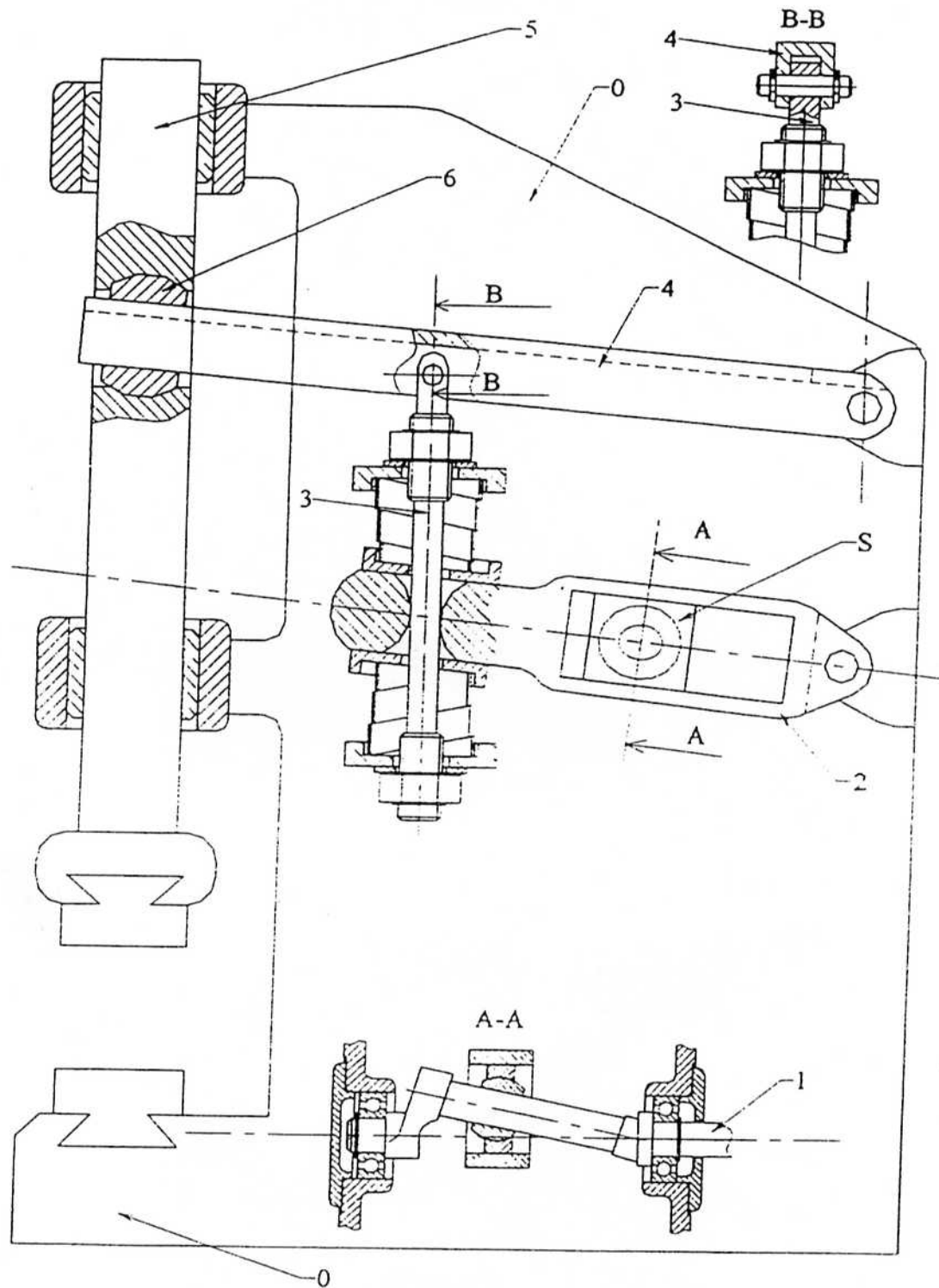


Figure 1 : dessin d'ensemble



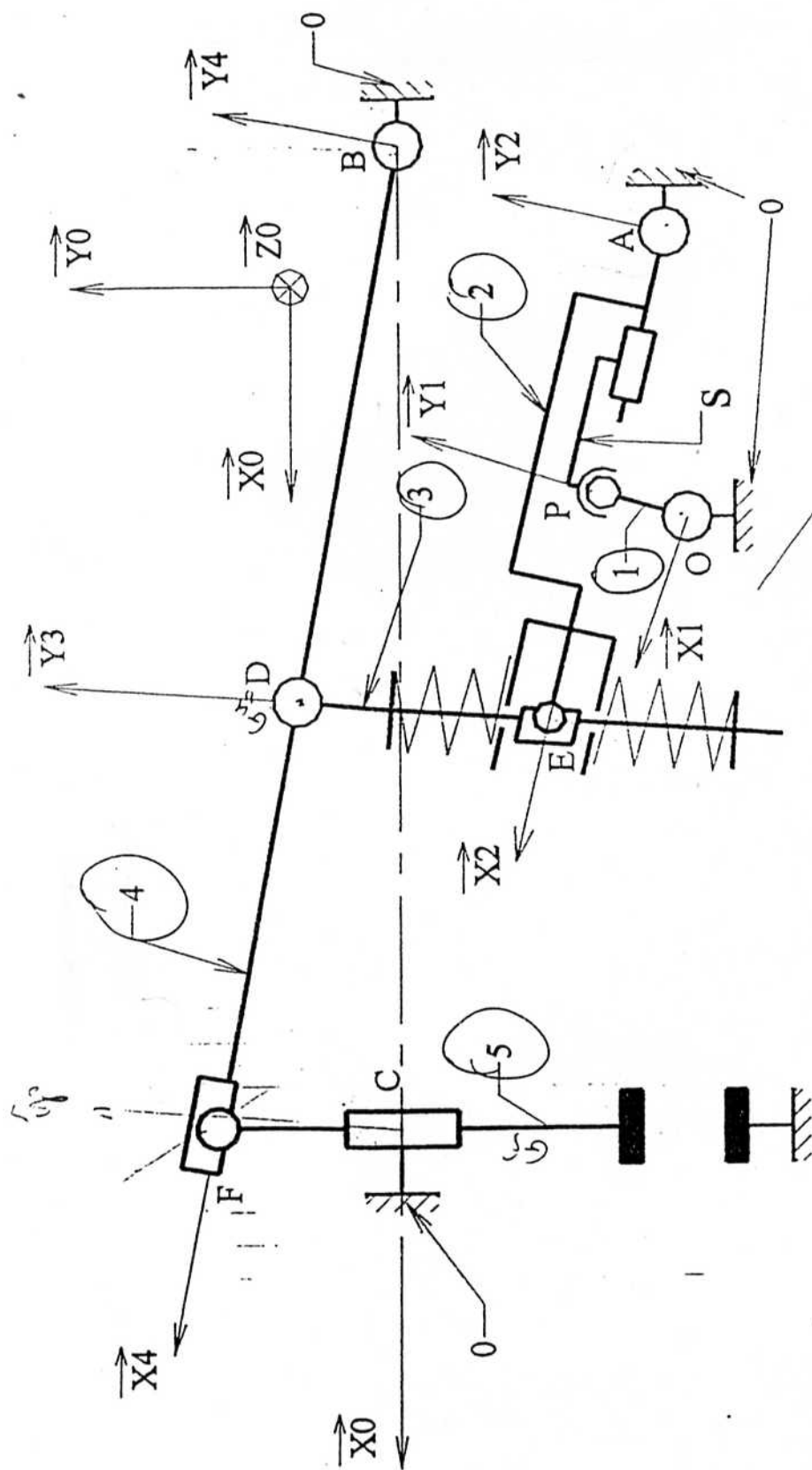


Figure 2 : schéma cinématique