RÉPUBLIQUE TUNISIENNE

***

Ministère de l'Enseignement Supérieur

Concours Nationaux d'Entrée aux Cycles de Formation d'Ingénieurs Session : Juin 2001

Concours en Mathématiques et Physique

Épreuve de Mathématiques II

Durée : 3H	Date : 12 Juin 2001	8Heure	Nb pages : 4
Barême :	Partie I : 6pts	Partie II : 9pts	Partie III : 5pts

L'usage des calculatrices est strictement interdit.

Une grande importance sera attachée à la rigueur du raisonnement, à la clarté de la rédaction et au soin de la présentation. Il est rappelé que tout résultat énoncé dans le sujet peut être utilisé pour traiter la suite, même s'il n'a pu être démontré.

Pour tout entier $m \in \mathbb{N}^*$, on munit $\mathbb{R}^m$ de sa base canonique et du produit scalaire usuel $\langle x, y\rangle_m = \sum_{j=1}^{m} x_j y_j$, avec, $x = (x_1, \dots, x_m)$ et $y = (y_1, \dots, y_m)$.
On note $M_{n,p}(\mathbb{R})$ l'espace des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients réels, et $M_n(\mathbb{R}) = M_{n,n}(\mathbb{R})$. Si $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ on note ${}^tA$ la matrice transposée de A. (${}^tA \in M_{p,n}(\mathbb{R})$.)
$\mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$ désigne l'espace des endomorphismes de $\mathbb{R}^m$.
On rappelle que toute matrice symétrique réelle est diagonalisable dans une base orthonormée.

Partie I

On note $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $(\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_p)$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$.
Soit $u: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ une application linéaire de matrice B.

1. Montrer qu'il existe une unique application linéaire notée $u^*: \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n$ telle que

$$\langle u(x), y\rangle_p = \langle x, u^*(y)\rangle_n, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \text{ et } \forall\, y \in \mathbb{R}^p.$$

   (On pourra caractériser u^* par sa matrice)

2. Montrer que $u^* \circ u$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ diagonalisable et que ses valeurs propres sont positives.
3. Montrer que $\operatorname{Ker} u^* \circ u = \operatorname{Ker} u$.
4. a) Soit x un vecteur propre non nul de $u^* \circ u$ relativement à une valeur propre λ non nulle.

Montrer que $u(x) \neq 0$ et que $u(x)$ est un vecteur propre non nul de $u \circ u^*$ pour la même valeur propre λ.

b) Montrer que si λ est une valeur propre non nulle de $u^* \circ u$ de multiplicité m, alors λ est une valeur propre de $u \circ u^*$ de multiplicité m.

c) En déduire que $u^* \circ u$ et $u \circ u^*$ ont le même rang et que ce rang est égal au rang de u.

d) En déduire que si $n \geq p$, alors le polynôme caractéristique de la matrice ${}^tBB$ est égal à $(-1)^{n-p}X^{n-p}P_{B^tB}$, avec P_{B^tB} le polynôme caractéristique de B^tB.

5. Soit $x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

a) Donner le rang de la matrice X^tX

b) Déduire de ce qui précède que la matrice X^tX est semblable à la matrice diagonale $\begin{pmatrix} \|x\|_n^2 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$, avec $\|x\|_n^2 = \sum_{j=1}^{n} x_j^2$.

c) Si $\|x\|_n = 1$, montrer que la matrice $I_n - 2X^tX$ est orthogonale et c'est la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan orthogonal à x. (I_n désigne la matrice identité dans $M_n(\mathbb{R})$).

6. Dans cette question on prend $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Calculer ${}^tBB$ et B^tB et donner sans calculs une matrice diagonale semblable à la matrice B^tB.

7. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique et $n \geq p$. Montrer que les propriétés a) et b) suivantes sont équivalences:

a) Il existe une matrice $B \in M_{n,p}$ telle que $A = B^tB$

b) $\text{rang} A \leq p$ et les valeurs propres de A sont positives.

Partie II

A)

1. Montrer qu'une matrice symétrique $S \in M_2(\mathbb{R})$ définit une forme bilinéaire symétrique positive si et seulement si $\text{tr}(S) \geq 0$ et $\det S \geq 0$. ($\text{tr}S$ **désigne la trace de la matrice** S **et** $\det S$ **le déterminant de** S.)

Soient a, b et c trois nombres réels strictement positifs, et la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & a^2 & c^2 \\ a^2 & 0 & b^2 \\ c^2 & b^2 & 0 \end{pmatrix}$.

On note φ la forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^3$ associée à la matrice A.

2. Ecrire $\varphi(x, y)$, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$. ($x = (x_1, x_2, x_3)$ et $y = (y_1, y_2, y_3)$).

3. On considère l'hyperplan $\mathcal{H}$ de $\mathbb{R}^3$ défini par: $\mathcal{H} = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3;\ x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$.

a) Donner la matrice $A_{\mathcal{H}}$ de la restriction de φ à $\mathcal{H}$ relativement à la base (v, w) de $\mathcal{H}$, avec $v = (-1, 1, 0)$ et $w = (-1, 0, 1)$.

b) Montrer que la matrice $(-A_{\mathcal{H}})$ définit une forme bilinéaire symétrique positive si et seulement si $2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4 \geq 0$.

c) Montrer que si a, b, c représentent les mesures des cotés d'un triangle dans le plan, alors l'aire $\mathcal{S}_{a,b,c}$ de ce triangle vérifie : $16\mathcal{S}_{a,b,c}^2 = 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4$.

d) En déduire une condition nécessaire et suffisante sur les nombres a, b, c pour que la matrice $(-A_{\mathcal{H}})$ définisse une forme bilinéaire symétrique positive.

B)

Pour la suite de cette partie, on prend $a = b = c = 1$. On note toujours φ la forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^3$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On note Q la forme quadratique associée à la forme φ et $\mathcal{O}(Q) = \{u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3);\ Q(u(x)) = Q(x),\ \forall x \in \mathbb{R}^3\}$. **(L'ensemble $(\mathcal{O}(Q))$ est appelé le groupe orthogonal de la forme quadratique Q.)**

1. Q est-elle non dégénérée ?
2. Réduire la forme quadratique Q.
3. Donner une base (v_1, v_2, v_3) de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice de φ dans cette base est
$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
4. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ et M sa matrice dans la base (v_1, v_2, v_3).

   a) Prouver que :
$$u \in \mathcal{O}(Q) \iff \varphi(u(x), u(y)) = \varphi(x, y), \forall (x, y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$$
$$\text{et}\quad u \in \mathcal{O}(Q) \iff {}^tMJM = J.$$

   b) Calculer $\det u$, pour $u \in \mathcal{O}(Q)$.
5. Soit $\mathcal{M}(Q) = \{M \in M_3(\mathbb{R}) \text{ tel que } {}^tMJM = J\}$

   a) Vérifier que pour tout $t \in \mathbb{R}$, les matrices $M_1(t)$ et $M_2(t)$ sont dans $\mathcal{M}(Q)$, avec
$$M_1(t) = \begin{pmatrix} \text{ch}t & \text{sh}t & 0 \\ \text{sh}t & \text{ch}t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } M_2(t) = \begin{pmatrix} \text{ch}t & 0 & \text{sh}t \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sh}t & 0 & \text{ch}t \end{pmatrix}$$

   b) En déduire une caractérisation des endomorphismes $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tels que $v \circ u = u \circ v$ pour tout $v \in \mathcal{O}(Q)$.

   c) L'ensemble $\mathcal{M}(Q)$ est-il un compact dans $M_3(\mathbb{R})$?

Soit Q_1 une forme quadratique non nulle telle que $\mathcal{O}(Q) \subset \mathcal{O}(Q_1)$. On note ψ la forme bilinéaire symétrique associée à Q_1. On se propose de montrer que Q et Q_1 sont proportionnelles.

6. a) Montrer qu'il existe un unique endomorphisme $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $\psi(x,y) = \varphi(x, u(y))$, $\forall x \in \mathbb{R}^3$ et $\forall y \in \mathbb{R}^3$.

   b) Montrer que pour tout $v \in \mathcal{O}(Q)$,

$$\varphi(v(x), v \circ u(y)) = \varphi(x, u(y)) \quad \text{et} \quad \varphi(v(x), u \circ v(y)) = \varphi(x, u(y)), \quad \forall x \in \mathbb{R}^3, \text{ et } \forall y \in \mathbb{R}^3$$

   c) En déduire que $u \circ v = v \circ u$, pour tout $v \in \mathcal{O}(Q)$ et qu'il existe $\lambda \neq 0$, tel que $Q_1 = \lambda Q$ et $\mathcal{O}(Q_1) = \mathcal{O}(Q)$.

7. L'ensemble $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^3; Q(x) = 1\}$ est-il un compact de $\mathbb{R}^3$?

8. Soit $u \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^3)$. On se propose de montrer que $u \in \mathcal{O}(Q) \iff u(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$.

   a) Montrer que si $u \in \mathcal{O}(Q)$, alors $u(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$.

   b) On suppose que $u(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$.

   i) Vérifier que $v_1 \in \mathcal{S}$, $\sqrt{2}v_1 + v_2 \in \mathcal{S}$, $\sqrt{2}v_1 - v_2 \in \mathcal{S}$, $\sqrt{2}v_1 + v_3 \in \mathcal{S}$, $\sqrt{2}v_1 - v_3 \in \mathcal{S}$ et $\sqrt{3}v_1 + v_2 + v_3 \in \mathcal{S}$.

   ii) En déduire que $\varphi(v_j, v_k) = \varphi(u(v_j), u(v_k))$, pour $j, k = 1, 2, 3$ et que $u \in \mathcal{O}(Q)$.

Partie III

Dans cette partie Q désigne une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ non dégénérée et φ la forme bilinéaire symétrique associée à Q. On note $\mathcal{O}(Q) = \{u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n);\ Q(u(x)) = Q(x),\ \forall x \in \mathbb{R}^n\}$, et $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^n; Q(x) = 1\}$.

1. Construire une base orthogonale $(v_1, \dots, v_n)$ de $\mathbb{R}^n$, telle que la matrice de φ relativement à cette base est diagonale de la forme $A = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}$.

   (I_p (respectivement I_q) désigne la matrice identité d'ordre p (respectivement la matrice identité d'ordre q)). p est le nombre de valeurs propres positives de la matrice de φ et q est le nombre de valeurs propres négatives de la matrice de φ.

   (**On précise que dans le cas où $q = 0$, alors $A = I_n$ et le cas où $p = 0$, alors $A = -I_n$**)

2. On suppose dans cette question que $p = q$ et $n = 2p$. On pose $w_j = v_j + v_{p+j}$ et $w_{p+j} = v_j - v_{p+j}$ pour tout $1 \leq j \leq p$.

   a) Montrer que $(w_1, \dots, w_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

   b) Calculer $Q(w_k)$, pour tout $1 \leq k \leq n$ et donner la matrice de φ dans cette base.

3. Montrer que $\mathcal{S}$ est un compact non vide de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si φ est définie positive.

4. On suppose pour cette question que $pq \neq 0$. Soit $u \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$.

   a) Montrer que si $u \in \mathcal{O}(Q)$, alors $u(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$.

   b) Soit $u \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$ tel que $u(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$.

   i) Vérifier que pour tout $1 \leq j, k \leq p$ et $p+1 \leq \ell, m \leq n$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(v_j + v_k) \in \mathcal{S}$, $\sqrt{2}v_j + v_\ell \in \mathcal{S}$, $\sqrt{2}v_j - v_\ell \in \mathcal{S}$ et $\sqrt{3}v_j + v_\ell + v_m \in \mathcal{S}$.

   ii) En déduire que pour tout $1 \leq j, k \leq n$, $\varphi(v_j, v_k) = \varphi(u(v_j), u(v_k))$ et que $u \in \mathcal{O}(Q)$.