CORRECTION MATH II

Partie I

1. L'unicité découle du fait que $\langle \bullet, \bullet \rangle_n$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$. Pour l'existence il suffit de prendre l'application linéaire u^* de matrice ${}^tB$, car $\langle u(x), y\rangle_p = {}^tX{}^tBY = \langle x, u^*(y)\rangle_n, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^p$.

---

2. La matrice de $u^* \circ u$ est ${}^tBB$ qui est une matrice carrée symétrique n, donc elle est diagonalisable dans une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

   Soit λ une valeur propre de $u^* \circ u$ et $x \neq 0$ tel que $u^* \circ u(x) = \lambda x$, alors $\lambda\langle x, x\rangle_n = \langle u^* \circ u(x), x\rangle_n = \langle u(x), u(x)\rangle_p \geq 0$, donc $\lambda \geq 0$.

---

3. $x \in \ker u^* \iff \forall y \in \mathbb{R}^n, \langle y, u^*(x)\rangle_n = 0 \iff \forall y \in \mathbb{R}^n, \langle x, u(y)\rangle_p = 0 \iff x \in (\operatorname{Im} u)^\perp$.

   $x \in \operatorname{Ker} u^* \circ u \Rightarrow \langle u^* \circ u(x), x\rangle_n = \langle u(x), u(x)\rangle_p = 0 \Rightarrow x \in \operatorname{Ker} u$. Il est évident que $\operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Ker} u^* \circ u$.

---

4. a) Si $u^* \circ u(x) = \lambda x$, alors $u(x) \neq 0$ et $uu^* \circ u(x) = \lambda u(x)$, donc $u(x)$ est un vecteur propre non nul de $u \circ u^*$ pour la même valeur propre λ.

---

b) L'endomorphisme $u^* \circ u$ de $\mathbb{R}^n$ est un endomorphisme symétrique car sa matrice est ${}^tBB$, donc il est diagonalisable dans une base orthonormée. Si λ est une valeur propre non nulle de $u^* \circ u$ de multiplicité m, alors $\dim \ker(u^* \circ u - \lambda \mathrm{id}) = m$. Soit $(v_1, \ldots, v_m)$ une base de $\ker(u^* \circ u - \lambda \mathrm{id})$, alors $(u(v_1), \ldots, u(v_m))$ est un système libre de $\ker(u \circ u^* - \lambda \mathrm{id})$. Il en résulte que $\dim \ker(u \circ u^* - \lambda \mathrm{id}) \geq m$. Par réciprocité $\dim \ker(u \circ u^* - \lambda \mathrm{id}) = m$ et λ est une valeur propre de $u \circ u^*$ de même multiplicité.

---

c) Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ sont les valeurs propres non nulles de $u^* \circ u$ de multiplicités respectives $m_1, \ldots, m_s$, alors $\mathbb{R}^n = \ker u^* \circ u \oplus (\oplus_{j=1}^s \ker(u^* \circ u - \lambda_j \mathrm{id}))$ et $\mathbb{R}^p = \ker u \circ u^* \oplus (\oplus_{j=1}^s \ker(u \circ u^* - \lambda_j \mathrm{id}))$. Donc $\operatorname{rang}(u \circ u^*) = \operatorname{rang}(u^* \circ u)$. De plus $\ker(u^* \circ u) = \operatorname{Ker} u$. Donc $\operatorname{rang}(u^* \circ u) = \operatorname{rang} u$.

---

d) Si $n \geq p$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ sont les valeurs propres non nulles de $u^* \circ u$ de multiplicité respectives $m_1, \ldots, m_s$, et si $m = n - \sum_{j=1}^s m_j$, alors $P_{{}^tBB} = (-1)^n X^{n-m} \prod_{j=1}^s (X - \lambda_j)^{m_j}$ et $P_{B{}^tB} = (-1)^p X^{p-m} \prod_{j=1}^s (X - \lambda_j)^{m_j}$. Donc $P_{{}^tBB} = (-1)^{n-p} X^{n-p} P_{B{}^tB}$.

---

5. a) La matrice X est de type $(n, 1)$ et elle est de rang 1.

---

b) D'après ce qui précède la matrice X^tX est semblable à une matrice diagonale de type $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & & 0 \end{pmatrix}$. Comme la trace de la matrice X^tX est $||x||^2 = \sum_{j=1}^n x_j^2$, alors $\lambda = ||x||^2$.

---

b) Si $||x||_n = 1$, $H = I_n - 2X^tX$ est la matrice de l'endomorphisme $I - 2u \circ u^*$, avec u l'application linéaire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$ de matrice X. $H^2 = (I - 2X^tX)(I - 2X^tX) = I - 4X^tX + 4X^tXX^tX = I$, car ${}^tXX = 1$.
Si ${}^tXY = 0$, alors $HY = Y$, et $H\alpha X = \alpha X - 2\alpha X^tXX = -\alpha X$.

---

6. $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. ${}^tBB = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$ et $B^tB = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ -4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 8 \end{pmatrix}$. Donc B^tB est équivalente à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

---

7. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique et soit $p \leq n$.
$a) \Rightarrow b)$ résulte de ce qui précède. (Il suffit de prendre l'application linéaire $u: \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de matrice B.)
$b) \Rightarrow a)$ $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique et $p \leq n$ de valeurs propres positives. Si $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ sont les valeurs propres non nulles de A répétées autant de fois que leur ordre de multiplicité, alors il existe une matrice P orthogonale telle que $A = PD^tP$, avec $D = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \dots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & & 0 & \lambda_m \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & (\,0_{n-m}\,) \end{pmatrix}$, avec $(\,0_{n-m}\,)$ la matrice nulle de $M_{n-m}(\mathbb{R})$.
Comme le rang de A est au plus p, alors $m \leq p$. Il suffit de prendre la matrice $B = PD_p$.
avec $D_p \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ la matrice $D_p = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \dots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & & 0 & \sqrt{\lambda_m} \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & (\,0_{n-m,p-m}\,) \end{pmatrix}$.
avec $(\,0_{n-m,p-m}\,)$ la matrice nulle de type $(n-m, p-m)$.

Partie II

A)

1. Une matrice symétrique $S \in M_2(\mathbb{R})$ est diagonalisable. Si λ_1, λ_2 sont les valeurs propres de S. Alors S définit une forme bilinéaire symétrique positive ssi λ_1 et λ_2 sont positives ce qui est équivalent à $\lambda_1\lambda_2 \geq 0$ et $\lambda_1 + \lambda_2 \geq 0$. ce qui est encore équivalent à tr$S \geq 0$ et det $S \geq 0$.

2.

$$\varphi(x, y) = a^2(x_1y_2 + x_2y_1) + b^2(x_2y_3 + x_3y_2) + c^2(x_1y_3 + x_3y_1)$$

---

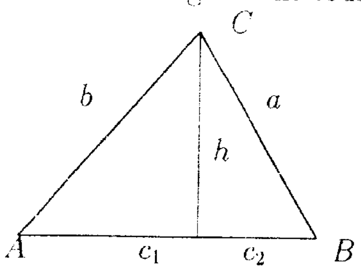
3. a) $\varphi(v, v) = -2a^2$, $\varphi(v, w) = b^2 - a^2 - c^2$ et $\varphi(w, w) = -2c^2$. Donc la matrice $A_{\mathcal{H}} = \begin{pmatrix} -2a^2 & b^2 - a^2 - c^2 \\ b^2 - a^2 - c^2 & -2c^2 \end{pmatrix}$.

---

b) Comme tr$A_{\mathcal{H}} = -2(a^2 + c^2) \leq 0$. alors $A_{\mathcal{H}}$ définit une forme bilinéaire symétrique négative ssi det $A_{\mathcal{H}} \geq 0$. ce qui est équivalent au fait que $2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4 \geq 0$.

---

c) Soit A, B, C un triangle. dans tous les cas on peut se ramener à la situation suivante:



h est la mesure de la hauteur issue de C, alors $2\mathcal{S}_{a,b,c} = hc$ et d'après le théorème de pythagore, $h^2 = a^2 - c_1^2 = b^2 - c_2^2$. Donc $a^2 - b^2 = c(c_1 - c_2)$. Donc $4\mathcal{S}^2_{a,b,c} = c^2\left(a^2 - \dfrac{(a^2 + c^2 - b^2)^2}{4c^2}\right)$, et $16\mathcal{S}^2_{a,b,c} = 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4$.

d) $A_{\mathcal{H}}$ définit une forme bilinéaire symétrique ssi a, b, c sont les mesures des côtés d'un triangle dans le plan.

B)

1. det $A \neq 0$, donc Q est non dégénérée.

---

2. $Q(x, y, z) = 2xy + 2xz + 2yz = \frac{1}{2}(x + y + 2z)^2 - \frac{1}{2}(x - y)^2 - 2z^2$.

---

3. Il n'y a pas unicité de la base (v_1, v_2, v_3). Il suffit de construire une base (u_1, u_2, u_3) formée de vecteurs propres de la matrice A et telle que $\varphi(u_j, u_k) = 0$ si $j \neq k$, et puis prendre le vecteur $v_j = \alpha_j u_j$ de manière que $\varphi(v_j, v_j) = \pm 1$. On prend par exemple $v_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v_3 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$. La matrice de J de φ dans la base (v_1, v_2, v_3) est $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

---

4. a) Les applications $x \longmapsto Q(u(x))$ et $x \longmapsto Q(x)$ sont des formes quadratiques. Elles sont égales ssi elles définissent la même forme bilinéaire symétrique. Il en résulte que $u \in \mathcal{O}(Q) \iff \varphi(u(x), u(y)) = \varphi(x, y)$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$.

La matrice de la forme bilinéaire symétrique $(x, y) \longrightarrow \varphi(u(x), u(y))$ est ${}^tMJM$ et la matrice la forme bilinéaire symétrique φ est J dans la base (v_1, v_2, v_3), donc $u \in \mathcal{O}(Q) \iff \varphi(u(x), u(y)) = \varphi(x, y)$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \iff {}^tMJM = J$.

---

b) $\det u = \pm 1$.

---

5. a) Vérification immédiate.

---

b) Si M est la matrice de u dans la base (v_1, v_2, v_3), alors M commute avec $M_1(t)$ et $M_2(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Il en résulte que $M = \lambda I$.

---

c) L'ensemble $\mathcal{M}(Q)$ n'est pas borné donc il n'est pas compact.

---

6. a) Comme φ est non dégénérée, il existe $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $\psi(x, y) = \varphi(x, u(y))$, $\forall x \in \mathbb{R}^3$ et $\forall y \in \mathbb{R}^3$. Si A est la matrice de φ et B la matrice de ψ, alors l'endomorphisme u admet $A^{-1}B$ comme matrice.

---

b) Soit $v \in \mathcal{O}(Q)$ et $(x, y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, $\varphi(v(x), v \circ u(y)) = \varphi(x, u(y))$ car $v \in \mathcal{O}(Q)$ et $\varphi(v(x), u \circ v(y)) = \psi(v(x), v(y)) = \psi(x, y) = \varphi(x, u(y))$, car $v \in \mathcal{O}(Q_1)$.

---

c) Il résulte de la question précédente que $\varphi(v(x), v \circ u(y)) = \varphi(v(x), u \circ v(y))$. Comme v est un endomorphisme injectif et φ non dégénérée, donc $u \circ v = v \circ u$, pour tout $v \in \mathcal{O}(Q)$.

Comme $\{v \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^3), v \circ u = u \circ v,\ \forall u \in \mathcal{O}(Q)\} = \{\lambda I\}$, il existe $\lambda \neq 0$, tel que $u = \lambda I$ et $Q_1 = \lambda Q$, et $\mathcal{O}(Q_1) = \mathcal{O}(Q)$.

---

7. Dans la base (v_1, v_2, v_3), l'ensemble $\mathcal{S} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3;\ Q(x_1, x_2, x_3) = 1\} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3:\ x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 1\}$. Cet ensemble n'est pas borné, donc non compact de $\mathbb{R}^3$.

---

8. Soit $u \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^3)$.

a) Soit $u \in \mathcal{O}(Q)$ et $x \in \mathcal{S}$, alors $Q(u(x)) = Q(x) = 1$ et donc $u(\mathcal{S}) \subset \mathcal{S}$. Soit $y \in \mathcal{S}$. comme u est un endomorphisme bijectif, il existe $x \in \mathbb{R}^3$ tel que $u(x) = y$. $Q(x) = Q(u(x)) = Q(y) = 1$. donc $x \in \mathcal{S}$ et $u(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$.

---

b) On suppose que $u(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$. On pose $x_1 = u(v_1)$, $x_2 = u(v_2)$ et $x_3 = u(v_3)$.
$Q(v_1) = \varphi(v_1, v_1) = 1$, donc $v_1 \in \mathcal{S}$. $\varphi(\sqrt{2}v_1 \pm v_2, \sqrt{2}v_1 \pm v_2) = 2\varphi(v_1, v_1) + \varphi(v_2, v_2) = 1$, donc $\sqrt{2}v_1 \pm v_2 \in \mathcal{S}$. De même $\sqrt{2}v_1 \pm v_3 \in \mathcal{S}$ et $\sqrt{3}v_1 + v_2 + v_3 \in \mathcal{S}$.
Donc $Q(x_1) = Q(v_1) = 1$, $2\varphi(x_1, x_1) + \varphi(x_2, x_2) \pm 2\sqrt{2}\varphi(x_1, x_2) = 1$. Donc $\varphi(x_1, x_2) = 0$.
De même on montre que $\varphi(v_j, v_k) = \varphi(x_j, x_k)$, pour $j, k = 1, 2, 3$. Donc $u \in \mathcal{O}(Q)$.

Partie III

1. La matrice de φ est symétrique, donc il existe une base orthonormée $(u_1, \dots, u_n)$ de $\mathbb{R}^n$ telle que la matrice de φ dans cette base est diagonale de la forme $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$,
avec $\lambda_j > 0$, pour tout $1 \leq j \leq p$ et $\lambda_j < 0$, pour tout $p + 1 \leq j \leq n$. Comme la base est orthonormée, cette matrice représente la matrice de φ dans cette base.
Pour $1 \leq j \leq p$, on pose $v_j = \frac{u_j}{\sqrt{\lambda_j}}$ et pour tout $p + 1 \leq j \leq n$, $v_j = \frac{u_j}{\sqrt{-\lambda_j}}$. Dans la base orthogonale $(v_1, \dots, v_n)$ de $\mathbb{R}^n$, la matrice de φ est diagonale $A = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}$.

---

2. On suppose dans cette question que $p = q$ et $n = 2p$ et on pose $w_j = v_j + v_{p+j}$ et $w_{p+j} = v_j - v_{v+j}$ pour tout $1 \leq j \leq p$.

a) $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j w_j = 0 \Rightarrow \alpha_j \pm \alpha_{p+j} = 0$, pour tout $1 \leq j \leq p \Rightarrow \alpha_k = 0$, pour tout $1 \leq k \leq n$.
Donc $(w_1, \dots, w_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

---

b) $Q(w_j) = 0$ et $\varphi(w_j, w_k) = 0$, pour $1 \leq j \neq k \leq p$, pour $1 \leq j \neq k \leq p$, $\varphi(w_j, w_{k+p}) = 0$ et pour $1 \leq j \leq p$, $\varphi(w_j, w_{j+p}) = 2$. Donc la matrice de φ dans cette base est $\begin{pmatrix} 0 & 2I_p \\ 2I_p & 0 \end{pmatrix}$.

---

3. Dans la base $(v_1, \ldots, v_n)$, $\mathcal{S} = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_1^2 + \ldots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \ldots - x_n^2 = 1\}$. $\mathcal{S}$ est non vide si $p \geq 1$ et $\mathcal{S}$ est borné ssi $p = n$, ce qui est équivalent à φ définie positive.

---

4. Soit $u \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$

a) $u \in \mathcal{O}(Q)$, alors $u(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$. (même démonstration que dans la partie II B) 8) a).

---

b) Soit $u \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$ tel que $u(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$. On pose $x_j = u(v_j)$, pour $j = 1, \ldots, n$.

i) La vérification est immédiate.

---

ii) $\frac{1}{\sqrt{2}}(v_j + v_k) \in \mathcal{S} \Rightarrow \varphi(x_j, x_k) = 0$, si $j \neq k$. Il est évident que $\varphi(x_j, x_j) = 1$, car $v_j \in \mathcal{S}$.
$\sqrt{2}v_j \pm v_\ell \in \mathcal{S} \Rightarrow \varphi(x_j, x_\ell) = 0$.
$\sqrt{3}v_j + v_\ell + v_m \in \mathcal{S} \Rightarrow \varphi(x_m, x_\ell) = 0$. Il en résulte que $\varphi(x_j, x_k) = \varphi(v_j, v_k)$, pour tous $1 \leq j, k \leq n$ et donc $u \in \mathcal{O}(Q)$.