RÉPUBLIQUE TUNISIENNE

***

Ministère de l'Enseignement Supérieur

Concours Nationaux d'Entrée aux Cycles de Formation d'Ingénieurs
Session: Juin 2001

Concours en Mathématiques et Physique

Épreuve de Mathématiques I

Durée: 4H	Date: 7 Juin 2001	8Heure	Nb pages: 5
Barême: Partie I: 6,5pts	Partie II: 5pts,	Partie III: 8,5pts	

L'usage des calculatrices est strictement interdit.

Une grande importance sera attachée à la rigueur du raisonnement, à la clarté de la rédaction et au soin de la présentation. Il est rappelé que tout résultat énoncé dans le sujet peut être utilisé pour traiter la suite, même s'il n'a pu être démontré.

$1^{ère}$ Partie.

1) Soit $a > 0$. On pose

$C_a = [0, a] \times [0, a] \quad ; \ D_a = \{(x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2 / x^2 + y^2 \leq a^2\}$.

a) Montrer que

$$\int\int_{D_a} e^{-(x^2+y^2)} dxdy \leq \int\int_{C_a} e^{-(x^2+y^2)} dxdy \leq \int\int_{D_{a\sqrt{2}}} e^{-(x^2+y^2)} dxdy.$$

b) En déduire que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

Dans la suite f désigne une fonction <u>continue</u> de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(y-x)^2} |f(y)| dy < +\infty.$$

On pose pour $x \in \mathbb{R}$, $u(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(y-x)^2} f(y) dy$.

2) a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2} f(x+\xi)d\xi$.

b) Montrer que si f est paire (resp. impaire) alors u est paire (resp. impaire).

c) Montrer que si $f(\xi) = \xi^m$, $m \in \mathbb{N}$, alors $u(x)$ est un polynôme de degré m et de même parité que m.

d) Montrer que si f est une fonction convexe sur $\mathbb{R}$ (c à d $\forall x, y \in \mathbb{R}$; $\forall \lambda \in [0,1]$, $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$), alors u l'est aussi.

3) Montrer que si f est continue bornée sur $\mathbb{R}$, il en est de même pour u .

4) a) Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a

$$|u(x) - u(y)| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2}|f(x+\xi) - f(y+\xi)|d\xi.$$

~~b) En déduire que si f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$, alors u l'est aussi.~~

c) Montrer que si f est k-lipschitzienne , alors u l'est aussi.

5) On suppose que $\lim_{|x|\to+\infty} f(x) = l$, $l \in \mathbb{R}$.

a) Montrer qu'il existe $M > 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leq M$.

b) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall \delta > 0$;

$$|u(x) - l| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\delta}^{\delta} e^{-\xi^2}|f(x+\xi) - l|\, d\xi + \frac{4M}{\sqrt{\pi}}\int_{\delta}^{+\infty} e^{-\xi^2} d\xi.$$

c) En déduire que $\lim_{|x|\to+\infty} u(x) = l$.

6) Soit $r > 0$. On pose $\varphi(y) = \begin{cases} 1, \text{ si } & |y| \leq 2r \\ \exp(-\frac{y^2}{4}), \text{ si } & |y| > 2r. \end{cases}$

Soit $x \in]-r, r[$.

a) Montrer que si $|y| > 2r$, alors $|y| \leq 2|y - x|$.

b) En déduire que $\forall y \in \mathbb{R}$, $e^{-(y-x)^2} \leq \varphi(y)$.

c) Montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\left|\frac{\partial^n}{\partial x^n}(e^{-(y-x)^2})\right| \leq P(r + |y|)\varphi(y),$$

où P est un polynôme de degé n.

7) Montrer que si f est bornée , alors u est de classe C^∞sur $\mathbb{R}$

$2^{ème}$ Partie.

Pour $x \in \mathbb{R}$ et $t > 0$, on pose $\quad g_t(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\dfrac{x^2}{4t}}$.

1) Montrer que :

a) $\quad \forall t > 0, \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g_t(x)dx = 1$.

b) $\quad \forall \delta > 0, \lim_{t \to 0^+} \displaystyle\int_{\delta}^{+\infty} g_t(x)dx = 0$.

c) $\quad \forall t > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \quad \dfrac{\partial^2 g_t(x)}{\partial x^2} = \dfrac{\partial g_t(x)}{\partial t}$.

2) Soit $t > 0$. On pose pour $x \in \mathbb{R}$; $\quad \hat{g}_t(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g_t(y)e^{-ixy}dy$.

a) Montrer que $\quad \hat{g}_t(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g_t(y)\cos(xy)dy$.

b) Montrer que $\quad \begin{cases} \dfrac{d}{dx}(\hat{g}_t(x)) = -2tx\hat{g}_t(x) \\ \hat{g}_t(0) = 1. \end{cases}$

c) En déduire l'expression de $\hat{g}_t(x)$.

3) Soient $\lambda = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $t > 0$.

a) En utilisant l'égalité

$$e^{-(\frac{y^2}{4t} + \lambda y)} = e^{a^2 t} e^{-\frac{(y+2at)^2}{4t}} e^{-iby},$$

montrer que $\quad \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g_t(y)e^{-\lambda y}dy = e^{\lambda^2 t}$.

b) En déduire pour $x \in \mathbb{R}$ et $t > 0$, les valeurs des intégrales suivantes :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_t(y)\cos(x-y)dy\,; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} g_t(y)\sin(x-y)dy\,,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_t(y)\mathrm{ch}(x-y)dy\,; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} g_t(y)\mathrm{sh}(x-y)dy.$$

4) Montrer que $\forall t, s > 0, x \in \mathbb{R}, \quad \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g_t(x-y)g_s(y)dy = g_{t+s}(x)$.

$3^{ème}$ Partie.

Soit $t > 0$. On pose pour $x \in \mathbb{R}$:

$$q_t(x) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} g_t(x + 2m\pi).$$

1) a) Montrer que la fonction $x \to q_t(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$, paire et 2π−périodique.

b) Montrer que $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} q_t(x)dx = 1.$

(Remarquer que $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} g_t(x+2m\pi)dx = \int_{(2m-1)\pi}^{(2m+1)\pi} g_t(y)dy$.

c) Déterminer les coefficients de Fourier de la fonction $x \to q_t(x)$.

d) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$q_t(x) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2 t}\cos(nx).$$

2) On pose pour $x \in [0,\pi]$: $p_t(x,y) = q_t(x-y) - q_t(x+y)$.

a) Vérifier que $\displaystyle p_t(x,y) = \frac{2}{\pi}\sum_{n\geq 1} e^{-n^2 t}\sin(nx)\sin(ny)$.

b) Montrer que $\forall\, x \in [0,\pi]$, $\forall\, p \in \mathbb{N}$, $\forall\, t > 0$;

$$\int_0^{\pi} p_t(x,y)\sin(py)dy = e^{-p^2 t}\sin(px).$$

3) Montrer que $\forall\, x, y \in [0,\pi]$; $\forall\, t, s > 0$, $\displaystyle\int_0^{\pi} p_t(x,z)p_s(z,y)dz = p_{t+s}(x,y)$.

4) Montrer que pour $x, y \in [0,\pi]$,

$$\int_0^{+\infty} p_t(x,y)dt = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}(\cos n(x-y) - \cos n(x+y))$$

5) Soit h la fonction 2π−périodique définie par

$$\forall\, x \in [0, 2\pi[, \quad h(x) = \frac{\pi}{2}x - \frac{x^2}{4}.$$

a) Tracer le graphe de h et calculer ses coefficients de Fourier.

b) Montrer que pour $x \in [0, 2\pi]$; on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(nx)}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi}{2}x + \frac{x^2}{4}.$$

6) Montrer que pour $x, y \in [0,\pi]$:

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} p_t(x,y)dt &= \frac{1}{\pi}\left(\frac{x+y-|x-y|}{2}\right)\left(\pi - \frac{x+y+|x-y|}{2}\right)\\ &= \frac{1}{\pi}\min(x,y)\cdot(\pi - \max(x,y)).\end{aligned}$$

7) Soit f une fonction continue sur $[0, \pi]$.

On pose pour $x \in [0, \pi]$; $v(x) = \int_0^\pi G(x, y) f(y) dy$,

où $G(x, y) = \frac{1}{\pi} \min(x, y) \cdot (\pi - \max(x, y))$.

a) Vérifier que $v(x) = \frac{\pi - x}{\pi} \int_0^x y f(y) dy + \frac{x}{\pi} \int_x^\pi (\pi - y) f(y) dy$.

b) Montrer que v est l'unique solution de l'équation différentielle :

$$\begin{cases} y'' = -f \\ y(o) = y(\pi) = 0 \end{cases}$$

c) Montrer que pour tous $x, y \in [0, \pi]$,

$$\frac{x(\pi - x) y(\pi - y)}{\pi^3} \leq G(x, y) \leq \frac{x(\pi - x)}{\pi}$$

d) En déduire que si f est positive, alors pour tout $x \in [0, \pi]$, on a

$$\frac{x(\pi - x)}{\pi^3} \int_0^\pi y(\pi - y) f(y) dy \leq v(x) \leq \frac{x(\pi - x)}{\pi} \int_0^\pi f(y) dy.$$

8) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que l'équation différentielle : $\begin{cases} z''(x) = -\lambda z(x) \\ z(o) = z(\pi) = 0 \end{cases}$

admet une solution non nulle si et seulement si $\lambda = n^2$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

b) En déduire que $\forall x \in [0, \pi], \forall n \in \mathbb{N}, \sin(nx) = n^2 \int_0^\pi G(x, y) \sin(ny) dy$.

c) Montrer qu'il existe deux constantes c_1 et c_2 strictement positives telles que

$\forall x \in [0, \pi],\ c_1 x(\pi - x) \leq \sin x \leq c_2 x(\pi - x)$.

9) a) Montrer qu'on a : $c_1 \leq \frac{1}{\pi}$ et $c_2 \geq \frac{4}{\pi^2}$.

b) Montrer que $\forall x \in [0, \pi], \frac{1}{\pi} x(\pi - x) \leq \sin x \leq \frac{4}{\pi^2} x(\pi - x)$.