Concours Nationaux d'Entrée aux Cycles de Formation d'Ingénieurs
Session 2011

Concours Biologie
Correction de l'Epreuve de Mathématiques

Exercice

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ un espace probabilisé donné.

**

$V = (X, Y)^t$, un vecteur aléatoire de loi gaussienne, $\aleph_2(0, \Gamma)$, centré et de matrice de covariance $\Gamma = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, . c'est à dire $Var(X) = Var(Y) = 3$ et $Cov(X, Y) = -1$.

1. $Cov(X, Y) = Cov(Y, X) = -1 \neq 0$, d'où, $E(XY) \neq E(X)E(Y)$, donc X et Y ne sont pas indépendantes.

2. $P_\Gamma(X) = \det(\Gamma - X.Id) = (4 - X)(2 - X) = 0 \Longleftrightarrow X = 4$ ou $X = 2$, donc Γ admet $\lambda_1 = 4$ et $\lambda_2 = 2$, comme valeurs propres, distinctes en dim 2 Γ est diagonalisable et il existe une base orthonormée de Vecteurs propres.

3. $Ker(\Gamma - 4.Id)$ est le s.e.v. engendré par $u_1 = (1; -1)^t$ donc $u = \frac{1}{\sqrt{2}}(1; -1)^t$ est un vecteur de base normé.

   $Ker(\Gamma - 2.Id)$ est le s.e.v. engendré par $v_1 = (1, 1)^t$, donc $v = \frac{1}{\sqrt{2}}(1; 1)^t$ et la base orthonormée est $B = (u, v)$.

4. (a) Soient les v.a. $T = \frac{1}{2} \prec V, u \succ$, et $Z = \frac{1}{\sqrt{2}} \prec V, v \succ$, avec $V = (X, Y)^t$

   $T = \frac{X-Y}{2\sqrt{2}}$ et $Z = \frac{X+Y}{2}$ suivent la loi gaussienne réduite centrée $\aleph(0, 1)$ car transformés linéaires de v.a. gaussiennes.

   (b) $var(T) = \frac{1}{8}\left[varX + varY - 2cov(X, Y)\right] = 1$ (d'après la matrice Γ)

   $var(Z) = \frac{1}{4}\left[varX + varY + 2cov(X, Y)\right] = 1$, $E(T) = E(Z) = 0$ donc $Cov(T, Z) = E(TZ)$,

   $E(TZ) = E\left[\left(\frac{X-Y}{2\sqrt{2}}\right)\left(\frac{X+Y}{2}\right)\right] = \frac{1}{4\sqrt{2}}(varX - vary) = 0$

   Donc la matrice $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \Lambda^{-1} = Id_2$ est la matrice de variance-covariance du vecteur $W = (T, Z)^t$,

   (c) $W = (T, Z)^t$ est transformé linéaire du vecteur V par la matrice $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{-1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$,

   donc la loi de W est gaussienne, centrée réduite de $\mathbb{R}^2$.

   (d) La densité de probabilité du couple (T, Z) est donnée par:

   $f_{(T,Z)}(t, z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det(\Lambda)}} \exp\left[-\frac{1}{2}(t, z).\Lambda.(t, z)^t\right] = \frac{1}{2\pi}\exp(-\frac{t^2+z^2}{2}) = f_T(t).f_Z(z)$.

   Donc T et Z sont des v.a. indépendantes, et de lois normale réduite centrée $\aleph(0, 1)$, chacune.

Problème

Partie I

1. $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n)!}{(2n+1)!} = \frac{1}{2n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, donc le rayon de convergence $R = +\infty$, et la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ est une série entière convergente sur tout $\mathbb{R}$, et sa limite est la fonction $h(x) =$ $\cosh(t) = \frac{e^t+e^{-t}}{2}$.

2. $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, donc $\exp(\frac{x^2}{2}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n.n!}$, et $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^n n!}{2^{n+1}(n+1)!} = \frac{1}{2(n+1)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, donc l rayon de convergence est $+\infty$.
Â

3. (a) par recurrence facile , car $2^{n+1}.(n+1) \leq (2n+2)!$
   (b) autre méthode : le produit de tous les nombres pairs jusqu'à $2n \leq$ au produit de tou les nombres jusqu'à $2n$

4. $\cosh(t) = \sum_{n\geq 0} \frac{t^{2n}}{(2n)!}$ et $\exp(\frac{t^2}{2}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{2^n.n!}$, comme $\forall n \geq 0$, $2^n n! \leq (2n)!$, alors on obtient $\frac{t^{2n}}{(2n)!} \leq \frac{t^{2n}}{2^n.n!}$, *et* $\cosh(t) \leq \exp(\frac{t^2}{2})$.

5. (a) $x \longmapsto \exp(x)$ est une fonction de classe C^∞, sur $\mathbb{R}$, de dérivée seconde positivı strictement sur $\mathbb{R}$, elle y est donc convexe.
   (b) la convexité de la fonction exp implique que pour tout $x \in [-1, 1]$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a
   $\exp(tx) \leq \frac{1}{2}(1-x)\exp(-t) + \frac{1}{2}(1+x)\exp(t)$

6. (a) X v.a.r., bornée par 1 et telle que $E(X) = 0$, implique *que* la v.a.r. $\exp(tX)$ est auss bornée p.s. et admet une moyenne finie, l'inégalité de la question précédente s'applique d'où le a).
   (b) $E[\exp(tX)] \leq \frac{1}{2}E(1-X).\exp(-t) + \frac{1}{2}E(1+X)\exp(t) \leq \frac{\exp(-t)+\exp(t)}{2} = ch(t) = \cosh(t)$.
   (c) l'inégalité $\cosh(t) \leq \exp(\frac{t^2}{2})$, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et b) impliquent :
   $E(\exp(tX)) \leq \exp(\frac{t^2}{2})$.

7. $E[\exp(t.S_n)] = E[\exp(t.\sum_{i=1}^n X_i)] = E\left[\prod_{i=1}^n \exp(tX_i)\right] \underset{par\ \text{indépendance}}{=} \prod_{i=1}^n E[\exp(t.X_i)]$
   $\underset{c)}{\leq} \prod_{i=1}^n \exp(\frac{t^2}{2})$.
   Donc $E[\exp(t.S_n)] \leq \exp(\frac{n.t^2}{2})$.(car les X_i ont même loi que X).

8. (a) $\varepsilon \succ 0, t \succ 0$, la fonction $x \longmapsto \exp(t.x)$ étant croissante, on a
   $(S_n \succ \varepsilon) \subset (\exp(t.S_n) \succ \exp(t\varepsilon))$ implique,$P(S_n \succ \varepsilon) \leq P(\exp(t.S_n) \succ \exp(t.\varepsilon))$.
   (b) L'inégalité de Markov implique:$P(S_n \succ \varepsilon) \leq \frac{E[\exp(t.S_n)]}{\exp(t.\varepsilon)} \leq \frac{\exp(n.\frac{t^2}{2})}{\exp(t.\varepsilon)}$.
   (c) $g(t) = n\frac{t^2}{2} - t.\varepsilon$; sa dérivé est $g\prime(t) = n.t - \varepsilon = 0 \Longleftrightarrow t = \frac{\varepsilon}{n} \succ 0$, et $g(\frac{\varepsilon}{n}) = \frac{-\varepsilon^2}{2n}$ et la courbe de g admet un minimum pour $t = \frac{\varepsilon}{n}$, qui vaut $\frac{-\varepsilon^2}{2n}$.

(d) pour tout $\varepsilon \succ 0$ et tout $t \succ 0$, la fonction exp étant croissante, on a :
$P(S_n \geq \varepsilon) \leq \exp\left\{\min_{t \succ 0}(n.\frac{t^2}{2} - t.\varepsilon)\right\} = \exp(-\frac{\varepsilon^2}{2n})$. d'où (3).

9. On a :

(a) $(|T| \succ \varepsilon) = (T \succ \varepsilon) \cup (T \prec -\varepsilon) = (T \succ \varepsilon) \cup (-T \succ \varepsilon)$, implique
$P(|T| \succ \varepsilon) \leq P(T \succ \varepsilon) + P(-T \succ \varepsilon)$.

(b) Appliquant l'inégalité (2) aux v.a $-T$ et T, on obtient:
$P(-T \succ \varepsilon) \leq \exp(-\frac{\varepsilon^2}{2.n}) \Longrightarrow P(|T| \succ \varepsilon) \leq 2.\exp(-\frac{\varepsilon^2}{2.n})$. d'où (4).

Corrigé de la partie II

1. La *v.a.r* $U \in [0,1]$, donc $0 \leq \sqrt{1+U^4} \leq \sqrt{2}$. On en déduit que $0 \leq \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+U^4} \leq 1$.
   D'où $|X| \leq 1$.
2. On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1 \sqrt{1+u^4}\,du = \frac{I}{\sqrt{2}}\\
\mathbb{E}(\overline{X}_n) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(X_i) = \mathbb{E}(X_1) = \frac{I}{\sqrt{2}}\\
\mathbb{E}(X^2) &= \frac{1}{2}\int_0^1 (1+u^4)\,du = \left[u+\frac{u^5}{5}\right]_0^1 = \frac{1}{2}+\frac{1}{10}\\
\mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}^2(X)\\
&\leq \mathbb{E}(X^2) - \frac{1}{2}, \quad \text{car} \quad I \geq 1\\
&\leq \frac{1}{2}+\frac{1}{10}-\frac{1}{2} = \frac{1}{10}
\end{aligned}$$

3. (a) En vertu de l'inégalité de Markov, on a :

$$\mathbb{P}\left(\left|(X-\mathbb{E}(X))^2\right| > \frac{\varepsilon^2}{2}\right) \leq 2\frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}.$$

   Il s'ensuit que :

$$\mathbb{P}\left(\left|X-\frac{I}{\sqrt{2}}\right| > \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right) \leq 2\frac{1}{10\varepsilon^2} = \frac{1}{5\varepsilon^2}.$$

   (b) On a :

$$\mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n-\frac{I}{\sqrt{2}}\right| > \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right) \leq 2\frac{\mathbb{V}(\overline{X}_n)}{\varepsilon^2}.$$

   Or, $\mathbb{V}(\overline{X}_n) = \dfrac{1}{n}\mathbb{V}(X) \leq \dfrac{1}{10n}$. Il vient alors :

$$\mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n-\frac{I}{\sqrt{2}}\right| > \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right) \leq \frac{1}{5n\varepsilon^2}.$$

   Par conséquent :

$$1-\mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n-\frac{I}{\sqrt{2}}\right| \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right) \leq \frac{1}{5n\varepsilon^2},$$

   soit,

$$\mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n-\frac{I}{\sqrt{2}}\right| \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right) \geq 1-\frac{1}{5n\varepsilon^2}.$$

On en déduit que $\left|\overline{X}_n - \frac{I}{\sqrt{2}}\right| \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ avec une probabilité supérieure ou égale $1 - \frac{1}{5n\varepsilon^2}$. C'est-à-dire

$$I \in \left[\sqrt{2}\overline{X}_n - \varepsilon, \sqrt{2}\overline{X}_n + \varepsilon\right]$$

avec une probabilité supérieure ou égale à $1 - \frac{1}{5n\varepsilon^2}$.

(c) Pour que la Relation (5) soit vérifiée, il suffit que $1 - \frac{1}{5n\varepsilon^2} \geq 1 - \alpha$. Or

$$1 - \frac{1}{5n\varepsilon^2} \geq 1 - \alpha \Rightarrow \frac{1}{5n\varepsilon^2} \leq \alpha \Rightarrow n \geq \frac{1}{5\alpha\varepsilon^2} = n_1^*.$$

(d) En appliquant l'inégalité (4) aux $v.a.r$, $(Y_i)_{1\leq i\leq n}$, on obtient :

$$\mathbb{P}\left(\left|\sum_{i=1}^{n} Y_i\right| > \varepsilon\right) \leq 2\exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2n}\right).$$

On en déduit que :

$$\mathbb{P}\left(\frac{2}{n}\left|\sum_{i=1}^{n} Y_i\right| > \frac{2\varepsilon}{n}\right) \leq 2\exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2n}\right),$$

soit,

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{I}{\sqrt{2}}\right| > \frac{2\varepsilon}{n}\right) \leq 2\exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2n}\right).$$

Soit ε' un réel positif tel que $\frac{\varepsilon'}{\sqrt{2}} = \frac{2\varepsilon}{n}$. Alors l'inégalité ci-dessus se réécrit en fonction de ε' :

$$\mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \frac{I}{\sqrt{2}}\right| > \frac{\varepsilon'}{\sqrt{2}}\right) \leq 2\exp\left(-\frac{n\varepsilon'^2}{16}\right).$$

On en déduit, après avoir passé à l'évènement complémentaire, que :

$$\forall\, \varepsilon' > 0, \quad \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \frac{I}{\sqrt{2}}\right| \leq \frac{\varepsilon'}{\sqrt{2}}\right) \geq 1 - 2\exp\left(-\frac{n\varepsilon'^2}{16}\right).$$

Enfin, il suffit de rempacer ε'^2 par ε.

(e) Pour que la Relation (5) soit vérifiée, il suffit que

$$1 - 2\exp\left(-\frac{n\varepsilon}{16}\right) \geq 1 - \alpha.$$

Or,

$$1 - 2\exp\left(-\frac{n\varepsilon}{16}\right) \geq 1 - \alpha \Rightarrow \exp\left(-\frac{n\varepsilon}{16}\right) \leq \frac{\alpha}{2} \Rightarrow n \geq -\frac{16}{\varepsilon^2}\ln(\frac{\alpha}{2}) = n_2^*.$$

4. On trouve $n_1^* = 2.000\,10^6$ et $n_2^* = 1.216\,10^6$.