Concours Biologie

Epreuve de Mathématiques

Date: Lundi 13 Juin 2011	Heure: 8H	Durée: 3H	Nbre pages: 5
Barème: Exercice: 7 pts	Problème partie I: 8 pts	partieII: 5 pts	

La qualité de la rédaction, le soin de la présentation et la rigueur des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies. Il est rappelé que tout résultat énoncé dans le texte peut être utilisé pour traiter la suite, même s'il n'a pu être démontré. L'usage de tout ouvrage de référence et de tout autre matériel électronique est strictement interdit.

NOTATIONS

Dans toute la suite, nous allons utiliser les notations suivantes:

- $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé.
- X une variable aléatoire réelle $v.a.r$ si X est à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou une partie de $\mathbb{R}$.
- $X(\Omega)$ est l'ensemble des valeurs possibles de X.
- Pour tout $\omega \in \Omega$, $X(\omega)$ est une réalisation de X.
- $\mathbb{E}(X)$ est l'espérance de X et $\mathbb{V}(X)$ est la variance de X lorsqu'elles existent.
- Une $v.a.r$ X est dite centrée si $\mathbb{E}(X) = 0$.
- La $v.a.r$ X est dite bornée, s'il existe une constante $C > 0$ telle que $\forall \omega \in \Omega$, $|X(\omega)| \leq C$.
- $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrice carrées d'ordre 2 et à cœfficients dans $\mathbb{R}$.
- Si v est un vecteur ligne de $\mathbb{R}^2$ alors v^t est le vecteur colonne de $\mathbb{R}^2$ égal à sa transposée.
- Si X_1, X_2 sont deux $v.a.r$, alors $V = (X_1, X_2)^t$ est un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^2$ d'espérance $m = (\mathbb{E}(X_1), \mathbb{E}(X_2))^t$ et de matrice de variance-covariance $\Gamma \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $\Gamma = (\gamma_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 2}$ et $\gamma_{i,j} = \mathrm{cov}(X_i, X_j)$.
- $\exp(\cdot)$ désigne la fonction exponentielle.
- Pour tous vecteurs $\mathbf{u} = (u_1, u_2)^t$ et $\mathbf{v} = (v_1, v_2)^t$ de $\mathbb{R}^2$, on note le produit scalaire Euclidien de u et v par la quantité
$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2.$$
Cette définition du produit scalaire est valable pour des vecteurs aléatoires $U = (U_1, U_2)^t$ et $V = (V_1, V_2)^t$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.

1. **Inégalité de Markov :** Si X est une $v.a.r$ positive et d'espérance finie, alors
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{P}(X > \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{\varepsilon}. \tag{1}$$

2. La fonction densité de probabilité conjointe d'un couple de $v.a.r$ gaussien, (X_1, X_2), de moyenne $\mathbf{m} = (m_1, m_2)^t$ et de matrice de variance-covariance Γ est définie pour tout vecteur colonne $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^t \in \mathbb{R}^2$ par :
$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det(\Gamma)}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{m})^t \Gamma^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{m})\right),$$
où Γ^{-1} est l'inverse de la matrice Γ.

3. Si un couple de $v.a.r$, (X_1, X_2), suit une loi normale dans $\mathbb{R}^2$, alors, pour tous réels a et b, la $v.a.r$ $aX_1 + bX_2$ suit une loi normale.

Exercice

Soit Γ la matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par :
$$\Gamma = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Soient X et Y deux $v.a.r$ telles que le vecteur $V = (X, Y)^t$ suit une loi normale de moyenne $\mathbf{m} = (0, 0)^t$ et de matrice de variance-covariance Γ (c est à dire $\mathbb{V}(X) = \mathbb{V}(Y) = 3$ et $\operatorname{cov}(X, Y) = -1$).

1. Montrer que les variables X et Y ne sont pas indépendantes.
2. Montrer que Γ admet deux valeurs propres distinctes $\lambda_1 > \lambda_2$ que l'on déterminera.
3. Donner une base orthonormée, $\mathcal{B} = (\mathbf{u}, \mathbf{v})$, formée de vecteurs propres de Γ. On conviendra que $\mathbf{u}$ appartient au sous-espace propre de Γ associé à λ_1.
4. On définit deux nouvelles $v.a.r$ T et Z de la façon suivante :
$$T = \frac{1}{2}\langle V, \mathbf{u}\rangle \quad \text{et} \quad Z = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle V, \mathbf{v}\rangle, \text{ où } V = (X, Y)^t.$$
   (a) Déterminer les lois de probabilité des $v.a.r$ T et Z.
   (b) Déterminer la matrice de variance-covariance, Λ, du vecteur aléatoire $W = (T, Z)$.
   (c) Déterminer la loi de probabilité du vecteur aléatoire W.
   (d) Calculer la densité de probabilité conjointe f du couple de $v.a.r$ (T, Z). En déduire que les $v.a.r$ T et Z sont indépendantes.

Problème

Partie I

1. Montrer que la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ est convergente. Préciser son rayon de convergence R et sa limite $h(x)$.

2. Donner le développement en série entière de la fonction $\exp(\frac{x^2}{2})$ en précisant son rayon de convergence R'.

3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n n! \leq (2n)!$.

4. En déduire que :
$$\forall t \in \mathbb{R}, \ \operatorname{ch}(t) \leq \exp(\frac{t^2}{2}). \tag{2}$$

5. (a) Montrer que la fonction $\exp(\cdot)$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
   (b) Soient x et t deux réels tels que $x \in [-1, 1]$ et $t \in \mathbb{R}$. En remarquant que
   $$\frac{1}{2}(1-x) + \frac{1}{2}(1+x) = 1 \quad \text{et} \quad -\frac{t}{2}(1-x) + \frac{t}{2}(1+x) = tx,$$
   montrer que
   $$\exp(tx) \leq \frac{1}{2}(1-x)\exp(-t) + \frac{1}{2}(1+x)\exp(t).$$

6. Soient t un réel quelconque et X une $v.a.r$ centrée et bornée par 1.
   (a) Montrer que $\exp(tX) \leq \frac{1}{2}(1-X)\exp(-t) + \frac{1}{2}(1+X)\exp(t)$.
   (b) Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}(\exp(tX))$ est fini, et que $\mathbb{E}(\exp(tX)) \leq \operatorname{ch}(t)$.
   (c) De l'inégalité (2), déduire que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}(\exp(tX)) \leq \exp(\frac{t^2}{2})$.

7. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $X_1, \ldots, X_n$ n $v.a.r$ indépendantes et de même loi que X. On note $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$\mathbb{E}(\exp(tS_n)) \leq \exp\left(n\frac{t^2}{2}\right).$$

8. Soient ε un réel positif, n un entier dans $\mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}_+^*$.
   (a) Montrer que $\mathbb{P}(S_n > \varepsilon) \leq \mathbb{P}\left[\exp(tS_n) > \exp(t\varepsilon)\right]$.
   (b) En appliquant l'inégalité de Markov (1) à la variable aléatoire $\exp(tS_n)$, montrer que
   $$\mathbb{P}(S_n > \varepsilon) \leq \frac{\exp(\frac{nt^2}{2})}{\exp(t\varepsilon)}.$$
   (c) Soit g_n la fonction définie pour tout $t \in \mathbb{R}$, par $g_n(t) = n\frac{t^2}{2} - t\varepsilon$. En étudiant les variations de la fonction $g_n(t)$, montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $g_n(t) \geq -\frac{\varepsilon^2}{2n}$, et que la courbe de la fonction g_n admet un minimum unique.

(d) En déduire que pour tout $\epsilon \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\mathbb{P}(S_n > \varepsilon) \leq \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2n}\right). \tag{3}$$

9. Soient T une $v.a.r$ et ε un réel dans $\mathbb{R}_+^*$.
   (a) Montrer que $\mathbb{P}(|T| > \varepsilon) \leq \mathbb{P}(T > \varepsilon) + \mathbb{P}(-T > \varepsilon)$.
   (b) En déduire que :

$$\mathbb{P}(|S_n| > \varepsilon) \leq 2\exp(-\frac{\varepsilon^2}{2n}). \tag{4}$$

Partie II

Soit g la fonction réelle définie sur l'intervalle $[0,1]$ par :

$$\forall x \in [0,1], \quad g(x) = \sqrt{1+x^4}.$$

On considère l'intégrale

$$I = \int_0^1 g(x)\,dx.$$

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, U une $v.a.r$ de loi uniforme sur $[0,1]$ et $U_1, \ldots, U_n$, n $v.a.r$ indépendantes de même loi que U. On pose $X = \frac{1}{\sqrt{2}}g(U)$, $X_n = \frac{1}{\sqrt{2}}g(U_n)$, $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ et $\overline{X}_n = \frac{1}{n}S_n$. Par ailleurs, on rappelle que la densité f de U est donnée par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit α et ε deux réels fixés dans $]0,1[$. On se propose de déterminer un entier $n^* \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geq n^*$, la valeur inconnue de I appartienne à l'intervalle $[A_n - \varepsilon, A_n + \varepsilon]$ avec une probabilité supérieure ou égale à $1-\alpha$, soit

$$\mathbb{P}(|A_n - I| \leq \varepsilon) \geq 1 - \alpha. \tag{5}$$

1. Montrer que la $v.a.r$ X est bornée par 1.
2. Montrer que $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(\overline{X}_n) = \frac{I}{\sqrt{2}}$ et que $\mathbb{V}(X) \leq \frac{1}{10}$.
3. (a) Montrer que $\mathbb{P}\left(|X - \frac{I}{\sqrt{2}}| > \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right) \leq \frac{1}{5\varepsilon^2}$.
   (b) i. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \frac{I}{\sqrt{2}}\right| \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right) \geq 1 - \frac{1}{5n\varepsilon^2}.$$

   ii. En déduire que $I \in [\sqrt{2}\overline{X}_n - \varepsilon, \sqrt{2}\overline{X}_n + \varepsilon]$ avec une probabilité supérieure ou égale $1 - \frac{1}{5n\varepsilon^2}$.

(c) Déterminer une valeur $n_1^* \in \mathbb{N}^*$ pour que la relation (5) soit vérifiée.

(d) En remarquant que les variables $Y_i = \frac{1}{2}(X_i - \frac{I}{\sqrt{2}})$, $i = 1, \ldots, n$, sont centrées et bornées par 1, montrer, en utilisant l'inégalité (4), que pour tout $\varepsilon > 0$, on a :

$$\mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \frac{I}{\sqrt{2}}\right| \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right) \geq 1 - 2\exp\left(-\frac{n\varepsilon^2}{16}\right).$$

En déduire que $I \in [\sqrt{2}\overline{X}_n - \varepsilon, \sqrt{2}\overline{X}_n + \varepsilon]$ avec une probabilité supérieure ou égale à $1 - 2\exp\left(-\frac{n\varepsilon^2}{16}\right)$.

(e) Déterminer alors une valeur $n_2^* \in \mathbb{N}^*$ pour que la relation (5) soit vérifiée.

4. On donne $\alpha = 0.001$ et $\varepsilon = 0.01$. Calculer n_1^* et n_2^*.