Correction Concours BIO

Partie 1

1. Il est facile de mettre $f(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) - (b, x)$ où $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
2. $\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1 - x_2$; $\frac{\partial f}{\partial x_2} = 2x_2 - x_1$ et $\frac{\partial f}{\partial x_3} = x_3 - 1$.
3. Il est évident que ce système peut s'écrire sous forme matricielle par $Ax - b = 0$.
4. Les valeurs propres sont : 3 simple et 2 double. Les vecteurs propres sont $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
5. A est diagonalisable car on a une base propre.
6. Le déterminant de la matrice étant non nul, alors elle est inversible.
7. A est inversible, donc le système $Ax = b$ admet une solution unique x^*.
8. $Ab = b$ donc b est un vecteur propre associé à la valeur propre 1
9. Un simple calcul nous donne $(Ax, y) = (x, Ay)$.pour tous vecteurs.
10. On a $f(b) = (Ab, b)/2 - (b, b) = -(Ab, b)/2 = -\|b\|^2/2$
11. On a $(A(x-b), x-b)/2 = x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 + (x_3-1)^2/2 = (x_1 - x_2/2)^2 + 3(x_2)^2/4 + (x_3-1)^2/2 \geq 0$
12. On montre facilement que tout vecteur x ; $f(x) - f(b) = (A(x-b), x-b)/2 = A(x-b, x-b)/2$
13. D'où $f(x) \geq f(b)$ pour tout x
14. On en déduit que b réalise un minimum pour f

Partie 2

1. En utilisant l'égalité suivante $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} dx = \sqrt{2\pi}\sigma$, le fait que l'espérance d'une variable normale $N(\mu, \sigma^2)$ est μ, le moment d'ordre 2 est $\mu^2 + \sigma^2$ et moyennant un changement des variables adéquat, on obtient
   (a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}a^2(x+b)^2} dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{a}$
   (b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-\frac{1}{2}a^2(x+b)^2} dx = -b\frac{\sqrt{2\pi}}{a}$

les vecteurs propres

$Ab = b.$ $\Rightarrow$ $b\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à la v.p. 1.

* $Ker(A - I) = \langle \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \rangle \Rightarrow dim\, Ker(A-I) = 2$

* $Ker(A - 3I) = \langle \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} \rangle$. $dim\, Ker(A-3I) = 1$

Donc les vecteurs propres sont $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ associés à $\lambda = 1$. et $\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ associé à 3.

5°/ A est diagonalisable car $dim\, Ker(A-I) = 2$ = à la multiplicité de $\lambda = 1$.

6°/ A est diagonalisable $\Rightarrow$ il existe une une matrice inversible P telle que $A = PDP^{-1}$.

où $D = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&3\end{pmatrix} \Rightarrow det\, A = det\, D = 3 \neq 0$

$\Rightarrow$ A est inversible.

7°/ $Ax = b$ admet une sol° unique $x^* = b$. car

$\boxed{Ab = b}$.

8°/ $Ab = b$. donc b est un vecteur invariant par A donc par f.

-2-

$$\langle Ax, y\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ 2x_2 - x_1 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= 2x_1 y_1 - x_2 y_1 + 2x_2 y_2 - x_1 y_2 + x_3 y_3 .$$

$$\langle x, Ay\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2y_1 - y_2 \\ 2y_2 - y_1 \\ y_3 \end{pmatrix} \right\rangle =$$

$$2x_1 y_1 - x_1 y_2 + 2x_2 y_2 - x_2 y_1 + x_3 y_3 .$$

$\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$ car A est une matrice symétrique.

10°/ $f(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^3 .$

$f(b) = \frac{1}{2}\langle Ab, b\rangle - \langle b, b\rangle = \frac{1}{2}\langle Ab, b\rangle - \langle Ab, b\rangle$

Car $Ab = b$. $\qquad = -\frac{1}{2}\langle Ab, b\rangle = -\frac{1}{2}\langle b, b\rangle$

11°/ $\langle A(x-b), x-b\rangle = \langle Ax - Ab, x-b\rangle = \langle Ax - b, x-b\rangle$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ 2x_2 - x_1 \\ x_3 - 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 - 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 2x_1^2 - x_1 x_2 + 2x_2^2 - x_1 x_2 + (x_3 - 1)^2 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\langle A(x-b), x-b\rangle = \left(x_1 - \frac{x_2}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}x_2^2 + \frac{1}{2}(x_3 - 1)^2 .$$

12°/ $f(x) - f(b) = x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2 + x_3^2 - x_3 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\langle A(x-b), x$

13/ d'après la question 11/ : $\frac{1}{2}\langle H x - b, x - b \rangle \geq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow f(x) - f(b) \geq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}^3$.

$\Rightarrow f(x) \geq f(b)$.

14/ le vecteur b représente un minimum pour f

Partie II

$$f_{(X_1, X_2)}(x_1, x_2) = \alpha\, e^{-2/3 f(x)} = \alpha\, e^{-\frac{2}{3}(x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2)}$$

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

a) $I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}a^2(x+b)^2}\, dx \overset{?}{=} \frac{\sqrt{2\pi}}{a}$.

on sait que $\sqrt{2\pi} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2/2}\, du$.

Si on pose $u = a(x+b)$; $du = a\, dx$.

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2/2} \frac{du}{a} = \frac{\sqrt{2\pi}}{a}.$$

b) $\int_{-\infty}^{+\infty} x\, e^{-\frac{1}{2}a^2(x+b)^2}\, dx \overset{?}{=}$

$(e^w)' = w' e^w$. $\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} -a^2 x\, e^{-\frac{a^2}{2}(x+b)^2}\, dx - a^2 b \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{a^2}{2}(x+b)^2}\, dx = e^{u}\Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0$

$w = -\frac{a^2}{2}(x+b)^2$.

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} x\, e^{-\frac{a^2}{2}(x+b)^2}\, dx = -\frac{\sqrt{2\pi}}{a^3} \cdot a^2 b = -b\frac{\sqrt{2\pi}}{a}$$

$$\int x^2 e^{\ldots} dx = \frac{\ldots}{a^3}$$

$$(e^w)' = w' e^w \Rightarrow (e^w)'' = w'' e^w + (w')^2 e^w$$

$$w = -\frac{a^2}{2}(x+b)^2 \qquad \left[[e^w]' \right]_{-\infty}^{+\infty} = -\int_{-\infty}^{+\infty} a^2 e^w + \int_{-\infty}^{+\infty} a^4 x^2 e^w$$

$$\Rightarrow 0 = -a^2 \cdot \frac{\sqrt{2\pi}}{a} + a^4 \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^w dx$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{a^2}{2}(x)^2} dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{a^3}$$

2- α? $\displaystyle\iint_{-\infty}^{+\infty} \alpha e^{-\frac{2}{3}\left[(x_1 - \frac{x_2}{2})^2 + \frac{3x_2^2}{4}\right]} dx_1 dx_2 = 1$

α? $$\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x_2^2}{2}} \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{2}{3}(x_1 - \frac{x_2}{2})^2} dx_1 \right)}_{= \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2\pi}}{2}} dx_2 = 1.$$

$$\alpha \cdot \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2\pi}}{2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x_2^2/2} dx_2 = 1 \iff \boxed{\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3\pi}}$$

3) $$f_{X_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) dx_2 = \alpha e^{-\frac{2}{3} x_1^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{2}{3}(x_2^2 - x_1 x_2)} dx_2$$

$$= \alpha e^{-\frac{2}{3} x_1^2 + \frac{x_1^2}{6}} \cdot \frac{\sqrt{2\pi} \cdot \sqrt{3}}{2} = e^{-x_1^2/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

$$f_{X_2}(x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X_1, X_2)}(x_1, x_2) dx_1 = \alpha e^{-x_2^2/2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{2}{3}(x_1 - x_2/2)^2} dx_1$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x_2^2/2}$$

4°/ $X_1 \sim \mathcal{N}(0, 1)$ les lois gaussiennes

$X_2 \sim \mathcal{N}(0, 1)$ réduites centrées.

5°/ $P(X_1 > 0) = 1 - P(X_1 \leq 0) = 1 - \int_{-\infty}^{0} f_{X_1}(x_1) dx_1$

$= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

$P(X_2 < 0) = \int_{-\infty}^{0} f_{X_2}(x_2) dx_2 = \frac{1}{2}$.

6°/ $E(2X_1 + 3X_2) = 2E(X_1) + 3E(X_2) = 0$

7°/ $\mathrm{var}(2X_1) = 4 \cdot \mathrm{var} X_1 = 4$.

$\mathrm{var}(-3X_2) = 9 \,\mathrm{var} X_2 = 9$.

8°/ $E((X_1 + X_2)^2) = E(X_1^2 + X_2^2 + 2X_1X_2)$

$= E(X_1^2) + E(X_2^2) + 2E(X_1X_2)$.

$= \mathrm{var} X_1 + \mathrm{var} X_2 + 2 \,\mathrm{cov}(X_1, X_2) = 1 + 1 + 2\mathrm{cov}($

$E(X_1X_2) = \alpha \iint x_1 x_2 f_{X_1,X_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2$

$= \alpha \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x_2 e^{-\frac{3}{4}x_2^2} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x_1 e^{-\frac{2}{3}(x_1 - \frac{x_2}{2})^2} dx_1 \right) dx_2}_{= 0} = 0$.

$\Rightarrow \boxed{E(X_1 + X_2)^2 = 2}$

d'après 1°/ [illegible] car $b = 0$ [illegible] l'intégrale [illegible] sur $\mathbb{R}$.

$Cov(X_1, X_2) = E(X_1 X_2) - E(X_1)E(X_2) = 0$.

$Var(X_1 + X_2) = E(X_1 + X_2)^2 = 2$.

$f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) \neq f_{X_1}(x_1) \cdot f_{X_2}(x_2)$ donc X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes.

Partie III.

Z_1, Z_2 des v.a. i.i.d $\sim \mathcal{N}(0,1)$.

$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$; $z \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} U = Z_1 \\ V = Z_1 + Z_2 \\ T = Z_1^2 \\ W = \sqrt{T} \end{cases}$$

1°/ $W = \sqrt{Z_1^2} = |Z_1| = \sqrt{T}$

Définissons la loi de T ?

Par le th. de chgt de variable on a : si X admet une densité f_X, la v.a. $Y = \varphi(X)$ admet une densité $\boxed{f_Y(y) = |(\varphi^{-1})'(y)| \cdot f_X(\varphi^{-1}(y))}$

en supposant que φ est difféom local de $]0, +\infty[$ ds $]0, +\infty[$; on a $f_T(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} \left[f_{Z_1}(\sqrt{t}) + f_{Z_1}(-\sqrt{t}) \right] \cdot \mathbb{1}_{\{t>0\}}$

Comme f_{Z_1} est paire $\boxed{f_T(t) = \mathbb{1}_{\{t>0\}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t}{2}\right) \cdot t^{-1/2}}$

$T \sim \gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Rappel : si $Z_1 \sim \mathcal{N}(0,1)$ alors

$$E\left(Z_1^{2k+1}\right) = 0 \quad \text{et} \quad E\left(Z_1^{2k}\right) = \frac{(2k)!}{2^k\, k!}$$

$$\Rightarrow E\left(Z_1^4\right) = \frac{4!}{4 \cdot 2!} = \frac{\cancel{4} \cdot 3 \cdot \cancel{2} \cdot 1}{\cancel{4} \cdot 1 \cdot \cancel{2}} = 3.$$

$$\Rightarrow \operatorname{Var}(T) = E(T^2) - 1 = 3 - 1 = 2.$$

$$* \operatorname{Var}(W) = E(W^2) - E(W)^2 = E(T) - \left(\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\right)^2$$

$$= 1 - \frac{4}{2\pi} = 1 - \frac{2}{\pi}$$

4°/ $E(V) = E(Z_1 + Z_2) = E(Z_1) + E(Z_2) = 0.$

$$E(V^2) = E\left(Z_1^2 + Z_2^2 + 2Z_1Z_2\right) = E\left(Z_1^2\right) + E\left(Z_2^2\right)$$

car Z_1 et Z_2 sont indépendants. $= 1 + 1 = 2.$

$$\Rightarrow \operatorname{cov}(V,U) = E(V \cdot U) = E\left(Z_1^2 + Z_1Z_2\right) = E\left(Z_1^2\right) = 1$$

car $E(Z_1 Z_2) = 0.$

5°/ Comme Z_1 et Z_2 sont indépendants alors

$$f_{(Z_1,Z_2)}(z_1, z_2) = f_{Z_1}(z_1) \times f_{Z_2}(z_2) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{z_1^2 + z_2^2}{2}\right).$$

$\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2.$

Donc (Z_1, Z_2) suit une loi gaussienne de dimension deux de vecteur espérance $m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et de matrice de covariance $I_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

6) $\phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(x_1, x_2) \longmapsto (u, v) \;/\; \begin{cases} u = x_1 \\ v = x_1 + x_2 \end{cases}$

$|\mathrm{Jac}\,\phi| = 1.$

a) $\phi^{-1} \begin{cases} x_1 = u \\ x_2 = v - u \end{cases}$

b) $|\mathrm{Jac}.(\phi^{-1})| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u} & \frac{\partial x_1}{\partial v} \\ \frac{\partial x_2}{\partial u} & \frac{\partial x_2}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1.$

c) $(U, V) = \phi(Z_1, Z_2) = (Z_1, Z_1 + Z_2)$.

$$f_{U,V}(u,v) = \frac{1}{|J_\phi(\phi^{-1}(u,v))|} \cdot f_{(Z_1,Z_2)}(\phi^{-1}(z_1, z_2))$$

$(*)$

$$= \frac{1}{2\pi} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(u^2 + (v-u)^2\right)\right\} \neq f_U(u) \cdot f_V(v$$

7°/ $$f_V(v) = \int_{\mathbb{R}} f_{(U,V)}(u,v)\, du = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}v^2} \cdot e^{-\frac{1}{2}(2u^2 - 2uv)} du$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-v^2/2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(u^2 - uv)} du.$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-v^2/2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(u - \frac{v}{2}\right)^2 + v^2/4} du.$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-v^2/4} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(u - \frac{v}{2}\right)^2} du = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{v^2}{4}} \cdot \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2}} = \boxed{\frac{e^{-v^2/4}}{2\sqrt{\pi}}} = f_V(v$$

U et V ne sont pas indépendants !