Concours Nationaux d'Entrée aux Cycles de Formation d'Ingénieurs
Session 2009

Concours Biologie
Correction de l'épreuve de Mathématiques

Partie I

1) Il est évident que T_f est linéaire par rapport à f.

2) On a par intégration par parties: $T_f(-x) = \frac{1}{x^2}\int_0^{-x} tf(-t)dt = \frac{1}{x^2}\int_0^{x} tf(t)dt$ pour $x \neq 0$ d'où si f est paire (respectivement impaire) T_f est paire (respectivement impaire)

3) Il est clair que si $f \geq 0$ alors $T_f \geq 0$ en effet si $x \neq 0$ on a

$$\begin{cases} x > 0 & \text{alors} \quad \frac{1}{x^2}\int_0^x tf(t)dt \geq 0 \\ x < 0 & \text{alors} \quad -\frac{1}{x^2}\int_x^0 tf(t)dt \geq 0 \end{cases}$$

4) Si $f = c = cte$ alors $\frac{1}{x^2}\int_0^x tf(t)dt = \frac{c}{2}$

5) Si $f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$ alors $T_f(x) = \frac{1}{x^2}\int_0^x tf(t)dt = \frac{a_0}{2} + \frac{a_1}{3}x + \frac{a_2}{4}x^2$

6) Si $|f| \leq M$ alors $||T_f|| \leq M$

7) Si f est continue en 0 donc $|f(x) - f(0)| \leq \varepsilon$ pour t assez petit $|T_f(x) - T_f(0)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ pour x assez petit.

8) $(T_f(x))' = \frac{-2}{x^3}\int_0^x tf(t)dt + \frac{1}{x^2}xf(x) = \frac{1}{x^2}(f(x) - 2T_f(x))$

Partie II

1) On a si $f \in \mathcal{P}_2$ alors $T_f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{a_1}{3}x + \frac{a_2}{4}x^2 \in \mathcal{P}_2$

2) $A = M_f = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

3) Les valeurs propres sont $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{4}$ les vecteurs propres associées

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

4) $A^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^n} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3^n} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4^n} \end{pmatrix}$

5)

$$\begin{cases} x_n = & \frac{x_0}{2^n} \\ y_n = & \frac{y_0}{3^n} \\ z_n = & \frac{z_0}{4^n} \end{cases}$$

6) $\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \frac{x_0}{\frac{1}{2}} = 1$ d'où $x_0 = \frac{1}{2}$;

$\sum_{n=0}^{\infty} y_n = \frac{y_0}{\frac{2}{3}} = 1$ d'où $y_0 = \frac{2}{3}$;

$\sum_{n=0}^{\infty} z_n = \frac{z_0}{\frac{3}{4}} = 1$ d'où $x_0 = \frac{3}{4}$

Partie II

1) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$, et $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$, F est croissante et F est dérivable et on a

$$f_X(t) = F_X'(t) = \begin{cases} 6(t - t^2) & \text{si} \quad 0 < t < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2) On a

$$G(x) = 2T_f(x) = \frac{2}{x^2}\int_0^x tF(t)dt = \begin{cases} 0 & \text{si} \\ \frac{2}{x^2}\int_0^x 3t^3dt - \int_0^x 2t^4dt & \text{si} \\ \frac{2}{x^2}\int_0^x tF(t)dt = \frac{2}{x^2}\int_0^1 t(3t^2 - 2t^3)dt + \frac{2}{x^2}\int_1^x tdt & \text{si} \end{cases}$$

on a $\lim_{x \to -\infty} G(x) = 0$, et $\lim_{x \to +\infty} G(x) = 1$, G est croissante et G est dérivable on obtient donc $f_Y = G'$

3) $Z = G(Y)$, on calcul la fonction de répartition de Z on obtient

$$F_Z(z) = \begin{cases} O & \text{si} \quad z \leq 0 \\ z & \text{si} \quad o < z \leq 1 \\ 1 & \text{si} \quad z > 1 \end{cases}$$

d'où Z est uniforme sur $[0, 1]$

4) $Var(Z) = \frac{1}{12}$, $E(Z) = \frac{1}{2}$

5) L'inégalité de Markov, Z étant une variable positive alors on a $P(Z \geq a) \leq \frac{E(Z)}{a} = \frac{1}{2a}$

6) L'inégalité de Tchebychev donne $P(|Z - E(Z)|) \geq k) \leq \frac{Var(Z)}{k^2}$ d'où $P(|Z - \frac{1}{2}|) \geq a) \leq \frac{1}{12a^2}$

7) Un calcul simple donne

$$\Phi_Z(t) = \begin{cases} \frac{\exp(t) - 1}{t} & \text{si} \quad t \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad t = 0 \end{cases}$$

8) Un simple développement limité à l'ordre 2 de Φ_Z au voisinage de 0 donne
$\Phi_Z(t) = \Phi_Z(0) + \Phi_Z'(0)t + \Phi_Z''(0)\frac{t^2}{2} + o(t^2) = 1 + \frac{t}{2} + \frac{t^2}{3} + o(t^2)$
d'où $E(Z) = \frac{1}{2}$ et $Var(Z) = \Phi_Z''(0) + (\Phi_Z'(0))^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

9) $U = \min(Z, 1 - Z) \in [0,1]$ et $V = \max(Z, 1 - Z) \in [0,1]$
on calcul les fonctions de répartitions de U et V on trouve

$$F_V(v) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad v \leq \frac{1}{2} \\ 2v - 1 & \text{si} \quad \frac{1}{2} \leq v \leq 1 \\ 1 & \text{si} \quad v > 1 \end{cases}$$

En dérivant, on obtient

$$f_V(v) = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad \frac{1}{2} < v < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

d'où V est uniforme sur $(\frac{1}{2}, 1)$
De même pour U, on obtient

$$F_U(u) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad u \leq 0 \\ 2u & \text{si} \quad 0 \leq u \leq \frac{1}{2} \\ 1 & \text{si} \quad u \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

En dérivant, on obtient

$$f_U(u) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad u \geq \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad u \leq 0 \\ 2 & \text{si} \quad 0 \leq u \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

donc U est uniforme $[0, \frac{1}{2}]$

10) $E(U+V) = E(U) + E(V) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ et $Var(U+V) = Var(U) + Var(V) + 2Cov(U,V)$

Partie II

1) Un simple changement de variable donne $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ d'où $\Phi(0) = \frac{1}{2}$.

2) $E(H) = 5$ et $Var(H) = \frac{5}{6}$

3) Par l'inégalité de Markov, H étant une va positive, on obtient $P(H \geq 6) \leq \frac{E(H)}{6} = \frac{5}{6}$

4) Daprès le théorème limite centrale, on a $P(H > 6) = 1 - \Phi\left(\sqrt{\frac{6}{5}}\right)$

5) 16%

6) On obtient le système suivant

$$\begin{cases} 8 - 5a - b = |a| \\ 5a + |a| + b = 8 \end{cases}$$

les solutions (a, b) sont $(2, -4)$ et$(-2, 16)$

7) $\rho(K, H) = \frac{a}{|a|} = \pm 1$