REPUBLIQUE TUNISIENNE
Ministère de l'Enseignement Supérieur, de la Recherche Scientifique et de la Technologie

الجمهورية التونسية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي والتكنولوجيا

المناظرات الوطنية للدخول
إلى مراحل تكوين المهندسين
دورة 2009

Concours Nationaux d'Entrée aux Cycles de Formation d'Ingénieurs
Session 2009

Concours Biologie
Epreuve de Mathématiques

Date: Lundi 01 Juin 2009 Heure: 8 H Durée: 3 heures Nb pages: 4

Barème : Partie I : 6 pts Partie II : 2.5 pts Partie III: 7.5 pts Partie IV: 4 pts

Une grande importance sera attachée à la rigueur du raisonnement, à la clarté et au soin de la présentation. L'usage des calculatrices n'est pas autorisé. Il est rappelé que tout résultat énoncé dans le texte peut être utilisé pour traiter la suite, même s'il n'a pu être démontré.

Notations et rappels:
les notations suivantes sont considérés au cours de ce texte:

- $\mathbb{R}$: le corps des réels.
- E: l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
- E_0: l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
- P_2: l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré ≤ 2.
- E_1: l'espace vectoriel des fonctions continuement dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
- $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ un espace probabilisé donné.
- Les variables aléatoires notées v.a. sont à valeurs réelles et définies sur le même espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$.
- $P(X = i)$ désigne la probabilité que la v.a. X prenne la valeur i.
- $p_X(\cdot)$: la loi de probabilité d'une v.a. discrète X.
- $f_X(\cdot)$: la densité de probabilité d'une v.a. continue X.
- $F_X(\cdot)$: la fonction de répartition d'une v.a. X.
- $E(X)$: espérance mathématique de la v.a. X.
- $Var(X)$: variance de la v.a. X.
- $\rho(X, Y)$ est le coefficient de corrélation entre X et Y.

- $\phi_X(\cdot)$ est la fonction génératrice des moments de la v.a. X. Elle est donnée par $\phi_X(t) = E(e^{tX})$.

On considère l'application:

$$T: \begin{array}{ccc} E_0 & \to & E \\ f & \mapsto & T_f \end{array}$$

où T_f est définie par:

$$T_f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2}\displaystyle\int_0^x tf(t)dt & \text{si } x \neq 0 \\ \dfrac{f(0)}{2} & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Partie I: Propriétés élémentaires de T_f

Dans cette partie, f désigne un élément de E_0.

1. Montrer que l'application $T : f \mapsto T_f$ est linéaire par rapport à f.
2. Montrer que si f est paire alors T_f est paire.
3. Montrer que si f est impaire alors T_f est impaire.
4. Montrer que si f est positive alors T_f est positive.
5. Déterminer T_f dans le cas où f est constante puis dans le cas où $f \in P_2$.
6. On suppose que a est un réel strictement positif et que sur l'intervalle $[-a, a]$, la fonction f est bornée par un réel M. Montrer qu'il en est de même pour T_f.
7. En déduire que T_f est continue en 0, que T_f appartient à E_0 puis que T définit un endomorphisme de E_0.
   (Indication: on remarquera que $f(0) = \dfrac{2}{x^2}\displaystyle\int_0^x tf(0)dt$).
8. Montrer que, pour tout $x \neq 0$, $(T_f)'$ existe et vaut

$$(T_f)'(x) = \frac{1}{x}(f(x) - 2T_f(x))$$

   où $(T_f)'$ désigne la dérivé de T_f par rapport à x.

Partie II: T_f et Probabilité discrète

Dans cette partie, on suppose que f appartient à P_2. On munit P_2 de la base canonique $B = (1, X, X^2)$.

1. Montrer que T_f appartient à P_2.
2. Déterminer la matrice A de T_f par rapport à la base B.
3. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres associés de A.
4. Calculer A^n pour n entier ≥ 2.
5. Calculer, en fonction de $U_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$, la suite de vecteurs colonnes $(U_n)_{n\geq 0}$ définie par:
$$U_{n+1} = AU_n \quad n \geq 0,$$
où $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$.
6. Soient X, Y et Z trois variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbf{N}$ et dont les lois de probabilité sont données par $p_X(n) = P(X = n) = x_n$, $p_Y(n) = P(Y = n) = y_n$ et $p_Z(n) = P(Z = n) = z_n$. Déterminer x_0, y_0 et z_0 pour que x_n, y_n et z_n définissent bien des lois de probabilité.

Partie III: Calcul de lois

Dans cette partie, on considère la fonction F de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par:
$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ 3t^2 - 2t^3 & \text{si } 0 \leq t \leq 1, \\ 1 & \text{si } t > 1. \end{cases}$$

1. Vérifier que F est bien une fonction de répartition d'une v.a. continue X et déterminer sa densité f_X.
2. Soit la fonction G définie par $G(x) = 2T_F(x)$ pour tout réel x. Montrer que G est une fonction de répartition d'une v.a. continue Y dont on déterminera sa densité f_Y.
3. Soit la variable aléatoire Z définie par $Z = G(Y)$. Montrer alors que Z est une variable aléatoire uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$.
4. Calculer $E(Z)$ et $Var(Z)$.
5. Montrer que, pour tout $a > 0$, on a $P(Z \geq a) \leq \dfrac{1}{2a}$.

6. Déduire que, pour tout $a > 0$, on a $P(|Z - \frac{1}{2}| \geq a) \leq \dfrac{1}{12a^2}$.

7. Calculer $\phi_Z(t)$ la fonction génératrice des moments de Z.

8. En utilisant un développement limité au voisinage de 0 de $\phi_Z(t)$, retrouver $E(Z)$ et $Var(Z)$.

9. On pose $U = \min(Z, 1 - Z)$ et $V = \max(Z, 1 - Z)$. Déterminer f_U la densité de U et f_V celle de V.

10. Calculer $E(U + V)$ et $Var(U + V)$.

Partie IV: Tendance normale d'une v.a. uniforme

On considère une suite de variables aléatoires X_n, $1 \leq n \leq 10$, indépendantes et de même loi que la v.a. uniforme Z. On note par Φ la fonction de répartition d'une v.a. normale centré réduite $N(0,1)$. On pose $H = \sum_1^{10} X_i$.

1. Vérifier qu'on a $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ puis déduire $\Phi(0)$.

2. Calculer $E(H)$ et $Var(H)$.

3. Montrer que $P(H \geq 6) \leq \dfrac{5}{6}$.

4. En utiliser le théorème de la limite centrale, montrer que
$$P(H > 6) = 1 - \Phi(\sqrt{\frac{6}{5}}).$$

5. On donne $\Phi(\sqrt{\frac{6}{5}}) = 0.84$. Donner le pourcentage pour que la somme $H = \sum_1^{10} X_i$ dépasse 6.

6. On subit à H une transformation affine $K = aH + b$ de telle manière qu'on aura $P(K \geq 6) = 0.5$ et $P(K \leq 8) = 0.84$. Déterminer les valeurs possibles de a et b.

7. Calculer le coefficient de corrélation $\rho(K, H)$.

Fin de l'épreuve