

## Problème I

$$1. a) P_{\lambda}(M) = \det(M - \lambda I) = \begin{vmatrix} 6-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 6-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)^2(8-\lambda)$$

Les valeurs propres de  $M$  sont 5 double et 8 simple.

b) Le sous-espace propre correspondant à  $\lambda = 8$  est engendré par  $(1,1,1)$ . Le sous-espace propre correspondant à  $\lambda = 5$  est de dimension 2 et a pour base  $(-1,1,0)$  et  $(-1,0,1)$ . La somme des dimensions des 2 sous-espaces propres est 3 donc  $M$  est diagonalisable.

$$c) D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ où } Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ où } Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Q^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ où } Q^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ où } Q^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$d. M^n = QD^nQ^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \cdot 5^n + 8^n & -5^n + 8^n & -5^n + 8^n \\ -5^n + 8^n & 2 \cdot 5^n + 8^n & -5^n + 8^n \\ -5^n + 8^n & -5^n + 8^n & 2 \cdot 5^n + 8^n \end{pmatrix}$$

2.

a) Par hypothèse,  $P(A_{k+1}|A_k) = 3/4$  et  $P(A_{k+1}|B_k) = 1/8$  et  $P(A_{k+1}|C_k) = 1/8$ .

$A_{k+1} \Leftrightarrow (A_{k+1} \text{ et } A_k) \text{ ou } (A_{k+1} \text{ et } B_k) \text{ ou } (A_{k+1} \text{ et } C_k)$  donc

$$P(A_{k+1}) = P(A_{k+1}|A_k)P(A_k) + P(A_{k+1}|B_k)P(B_k) + P(A_{k+1}|C_k)P(C_k)$$

$$P(A_{k+1}) = (3/4)P(A_k) + (1/8)P(B_k) + (1/8)P(C_k). \text{ De même,}$$

$$P(B_{k+1}|B_k) = 3/4 \text{ et } P(B_{k+1}|A_k) = 1/8 \text{ et } P(B_{k+1}|C_k) = 1/8.$$

$$P(B_{k+1}) = P(B_{k+1}|A_k)P(A_k) + P(B_{k+1}|B_k)P(B_k) + P(B_{k+1}|C_k)P(C_k)$$

$$P(B_{k+1}) = (1/8)P(A_k) + (3/4)P(B_k) + (1/8)P(C_k). \text{ De même,}$$

$$P(C_{k+1}|C_k) = 3/4 \text{ et } P(C_{k+1}|A_k) = 1/8 \text{ et } P(C_{k+1}|B_k) = 1/8.$$

$$P(C_{k+1}) = P(C_{k+1}|A_k)P(A_k) + P(C_{k+1}|B_k)P(B_k) + P(C_{k+1}|C_k)P(C_k)$$

$$P(C_{k+1}) = (1/8)P(A_k) + (1/8)P(B_k) + (3/4)P(C_k).$$

b)

$$X_{k+1} = N \cdot X_k, \text{ où } N = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \frac{1}{8}M.$$

$$c) X_k = \frac{1}{8}M X_{k-1} \text{ par récurrence } X_k = \left(\frac{1}{8}\right)^k M^k X_0.$$



$$d) X_k = \frac{1}{3 \cdot 8^k} \begin{pmatrix} 2 \cdot 5^k + 8^k & -5^k + 8^k & -5^k + 8^k \\ -5^k + 8^k & 2 \cdot 5^k + 8^k & -5^k + 8^k \\ -5^k + 8^k & -5^k + 8^k & 2 \cdot 5^k + 8^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2 \cdot 5^k + 8^k)/(3 \cdot 8^k) \\ (-5^k + 8^k)/(3 \cdot 8^k) \\ (-5^k + 8^k)/(3 \cdot 8^k) \end{pmatrix},$$

donc  $P(A_k) = (2 \cdot 5^k + 8^k)/(3 \cdot 8^k)$ ,  $P(B_k) = (-5^k + 8^k)/(3 \cdot 8^k)$  et  $P(C_k) = (-5^k + 8^k)/(3 \cdot 8^k)$ .

e)  $\lim_{k \rightarrow +\infty} P(A_k) = \lim_{k \rightarrow +\infty} P(B_k) = \lim_{k \rightarrow +\infty} P(C_k) = 1/3$ .

3. a)  $T_1(\Omega) = \mathbb{N}^*$ ,  $T_1$  est l'attente pour que la première fois la particule soit en  $C$ , la probabilité pour qu'elle soit en  $C$  est  $\frac{1}{8}$  donc  $T_1$  suit une loi géométrique de paramètre  $\frac{1}{8}$ .

b) On a

$$g(z) = \frac{1}{8} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{7}{8}\right)^{n-1} z^n$$

d'où  $R = \frac{8}{7}$

c) Pour tout  $|z| < \frac{8}{7}$ ,  $g(z) = \frac{z}{8-7z}$ .

d)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)P(T_1 = n) = \frac{1}{8} \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)\left(\frac{7}{8}\right)^{n-1} = g''(1) = 112.$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 P(T_1 = n) = \frac{1}{8} \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 \left(\frac{7}{8}\right)^{n-1} = \frac{1}{8} \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)\left(\frac{7}{8}\right)^{n-1} + \frac{1}{8} \sum_{n=1}^{+\infty} n \left(\frac{7}{8}\right)^{n-1} = g''(1) + g'(1) = 104.$$

e)

$$P(T_1 > n+m | T_1 > n) = \frac{P(T_1 > n+m \text{ et } T_1 > n)}{P(T_1 > n)} = \frac{P(T_1 > n+m)}{P(T_1 > n)},$$

or  $P(T_1 > n) = 1 - P(T_1 \leq n) = 1 - \sum_{k=1}^n P(T_1 = k) = 1 - \frac{1}{8} \sum_{k=1}^n \left(\frac{7}{8}\right)^{k-1} = \left(\frac{7}{8}\right)^n$

d'où  $P(T_1 > n+m | T_1 > n) = \left(\frac{7}{8}\right)^m = P(T_1 > m)$

4. a)

• Pour  $s \geq 1$ , on a

$P(U \geq s) = P(T_1 \geq s \text{ et } T_2 \geq s) = P(T_1 \geq s)P(T_2 \geq s)$ , or

$$P(T_1 \geq s) = 1 - P(T_1 \leq s-1) = 1 - \sum_{n=1}^{s-1} P(T_1 = n) = 1 - \frac{1}{8} \sum_{n=1}^{s-1} \left(\frac{7}{8}\right)^{n-1} = \left(\frac{7}{8}\right)^{s-1},$$

$$P(U \geq s) = \left(\frac{7}{8}\right)^{2s-2}$$

• Pour  $t \geq 1$ , on a

$$P(V \leq t) = P(T_1 \leq t \text{ et } T_2 \leq t) = P(T_1 \leq t)P(T_2 \leq t) = \left(1 - \left(\frac{7}{8}\right)^t\right)^2.$$

b)

$$\bullet \forall s \in \mathbb{N}^*, \text{ on a } P(U = s) = P(U \geq s) - P(U \geq s+1) = \left(\frac{7}{8}\right)^{2s-2} - \left(\frac{7}{8}\right)^{2s} =$$

$\frac{25}{64} \left(\frac{7}{8}\right)^{2s-2}$   $U$  suit la loi géométrique de paramètre  $\frac{25}{64}$ .

- $\forall t \in \mathbb{N}^*$ , on a  $P(V = t) = P(V \leq t) - P(V \leq t-1) = \left(1 - \left(\frac{7}{8}\right)^t\right)^2 - \left(1 - \left(\frac{7}{8}\right)^{t-1}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{7}{8}\right)^{t-1} - \frac{25}{64}\left(\frac{7}{8}\right)^{2t-2}$ .
- $E(V) = \sum_{n=1}^{+\infty} nP(V = n) = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{7}{8}\right)^{n-1} - \frac{25}{64} \sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{7}{8}\right)^{2n-2} = \frac{1}{4} \frac{1}{\left(1 - \frac{7}{8}\right)^2} - \frac{25}{64} \frac{1}{\left(1 - \frac{49}{64}\right)^2} = \frac{336}{25}$ .
- c)  $U$  et  $V$  ne sont pas indépendantes.

## Problème II

### Partie 1

1. On a  $f_n(x) = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$  lorsque  $x$  tend vers l'infini,  $\int_0^{+\infty} x^n e^{-\frac{x^2}{2}} dx$  est convergente.

2. a)

$$\int_0^A x^{n+2} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = -A^{n+1} e^{-\frac{A^2}{2}} + (n+1) \int_0^A x^n e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

On fait tendre  $A$  vers l'infini, on obtient  $I_{n+2} = (n+1)I_n$ .

b) On a  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi} = 2 \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ , d'où  $I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ .

c)  $I_1 = \int_0^{+\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1$ .

d) Pour le cas pair

$$\begin{aligned} I_{2n} &= (2n-1)I_{2n-2} \\ I_{2n-2} &= (2n-3)I_{2n-4} \end{aligned}$$

...

$$I_2 = I_0$$

$I_{2n} = (2n-1)(2n-3)(2n-5)...5 \times 3 \times 1 I_0$ , on multiplie et on divise par  $2n(2n-2)(2n-4)...4 \times 2$ , On aura  $I_{2n} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{(2n)!}{2^n n!}$

Pour le cas impair

$$\begin{aligned} I_{2n+1} &= (2n)I_{2n-1} \\ I_{2n-1} &= (2n-2)I_{2n-3} \end{aligned}$$

...

$$I_3 = 2I_1$$

$$I_{2n+1} = 2n(2n-2)(2n-4)...4 \times 2 = 2^n n!$$

### Partie 2

1. a) On a  $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_0^{+\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1.$$

Donc  $f$  est une densité de probabilité.

b) La densité de  $M^2$  est donnée par

$$f_{M^2}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{t}}(f(\sqrt{t}) + f(-\sqrt{t})) & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-\frac{t}{2}} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$$

d'où  $M^2$  suit la loi exponentielle de paramètre  $\frac{1}{2}$ .  $E(M^2) = 2$  et  $V(M^2) = 4$

$$\mathcal{M}_{M^2}(n) = E(M^{2n}) = \int_0^{+\infty} x^{2n+1} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = I_{2n+1} = 2^n n!.$$

2. a)  $X = X_1 + X_2$ , on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(x-y) f_{X_2}(y) dy = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2} e^{-\frac{y}{2}} f_{X_1}(x-y) dy$$

on pose  $t = x - y$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{2} e^{-\frac{x-t}{2}} f_{X_1}(t) dt$$

- Si  $x \leq 0$ ,  $f_X(x) = 0$ .
- Si  $x > 0$ ,  $f_X(x) = \int_0^x \frac{1}{4} e^{-\frac{x-t}{2}} e^{-\frac{t}{2}} dt = \int_0^x \frac{1}{4} e^{-\frac{x}{2}} dt = \frac{1}{4} x e^{-\frac{x}{2}}$ .

$$f_X(t) = \begin{cases} \frac{1}{4} x e^{-\frac{x}{2}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

b) On a  $f_{Y/X=x} = \mathcal{U}([0, x])$

$$f_{Y/X=x}(y) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } y \in [0, x] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$f_{X,Y}(x, y) = f_{Y/X=x}(y) f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} e^{-\frac{x}{2}} & \text{si } 0 \leq y \leq x \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La loi marginale de  $Y$ ,

$$\forall \in \mathbb{R}, f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, y) dx$$

- Si  $y \leq 0$ ,  $f_Y(y) = 0$ .
- Si  $y > 0$ ,  $f_Y(y) = \int_y^{+\infty} \frac{1}{4} e^{-\frac{x}{2}} dx = \frac{1}{2} e^{-\frac{y}{2}}$

$Y$  suit la loi exponentielle de paramètre  $\frac{1}{2}$ .

c) la densité conditionnelle de  $X$  sachant  $Y$ :

$$\forall y > 0 \quad f_{X/Y=y}(x) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{\frac{y}{2}} e^{-\frac{x}{2}} & \text{si } x \geq y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

d)

$$E(X/Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X/Y=y}(x) dx = e^{\frac{y}{2}} \int_y^{+\infty} \frac{1}{2} x e^{-\frac{x}{2}} dx = e^{\frac{y}{2}} [-x e^{-\frac{x}{2}}]_y^{+\infty} + e^{\frac{y}{2}} \int_y^{+\infty} e^{-\frac{x}{2}} dx = y + 2$$

$$E(X^n Y^m) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x^n y^m f_{X,Y}(x, y) dx dy = \int_0^{+\infty} x^n e^{-\frac{x}{2}} \left( \int_0^x y^m dy \right) dx =$$

$$\frac{1}{m+1} \int_0^{+\infty} x^{n+m+1} e^{-\frac{x}{2}} dx = \frac{2^{n+m+2} (n+m+1)!}{m+1}.$$

**Partie 3**

1. a ) On a :  $ax^2 + bx + c = (\sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}})^2 - \frac{b^2}{4a} + c$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(ax^2+bx+c)} dx = e^{(\frac{b^2-4ac}{4a})} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}})^2} dx$$

on pose  $t = \sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}}$  on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(ax^2+bx+c)} dx = e^{(\frac{b^2-4ac}{4a})} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t)^2} \frac{dt}{\sqrt{a}} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{(\frac{b^2-4ac}{4a})}.$$

b)  $G = N(0, \sigma)$  et  $G = N(0, \sigma')$  sont indépendantes, on a

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_{G+G'}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_G(t-x)f_{G'}(x)dx = \frac{1}{\sigma\sigma'2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(t-x)^2}{2\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma'^2}} dx =$$

$$\frac{1}{\sigma\sigma'2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(\frac{\sigma^2+\sigma'^2}{\sigma^2\sigma'^2}x^2 - \frac{2t}{\sigma^2}x + \frac{t^2}{\sigma^2})} dx = \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 + \sigma'^2}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2(\sigma^2+\sigma'^2)}}$$

$$G + G' = N(0, \sqrt{\sigma^2 + \sigma'^2}).$$

c)  $\frac{S_n}{n} = N(0, \frac{1}{\sqrt{n}})$ .

2. a)

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| \geq \alpha\right) = P\left(\frac{S_n}{n} \leq -\alpha\right) + P\left(\frac{S_n}{n} \geq \alpha\right) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\alpha} e^{-\frac{n x^2}{2}} dx + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{+\infty} e^{-\frac{n x^2}{2}} dx.$$

On pose dans la première integrale  $t = -x$  on obtient le résultat.

b) évident

3. a) évident

b)  $\int_0^{+\infty} e^{-u\alpha} du = 1$

c)

$$\int_0^{+\infty} e^{-u\alpha} du - \int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2n} - u\alpha} du = \int_0^{+\infty} e^{-u\alpha} (1 - e^{-\frac{u^2}{2n}}) du \leq \int_0^{+\infty} \frac{u^2}{2n} e^{-u\alpha} du = \frac{1}{n\alpha^2}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \int_0^{+\infty} e^{-u\alpha} du - \int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2n} - u\alpha} du \right) = 0$$

d) Lorsque  $n$  tend vers l'infini, on a

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| \geq \alpha\right) \sim \sqrt{\frac{2}{n\pi}} e^{-\frac{n\alpha^2}{2}}.$$