REPUBLIQUE TUNISIENNE
Ministère de l'Enseignement Supérieur
Concours nationaux d'entrée aux cycles de formation d'ingénieurs
Session 2006

الجمهورية التونسية
وزارة التعليم العالي
المناظرات الوطنية للدخول
إلى مراحل تكوين المهندسين
دورة 2006

Concours Mathématiques et Physique, Physique et Chimie, Biologie et Géologie &Technologie
Epreuve d'Informatique

Date : Mardi 06 Juin 2006 **Heure : 15 H** **Durée : 2 H** **Nbre pages : 6**

Barème : EXERCICE : 6 points, PROBLEME : 14 points

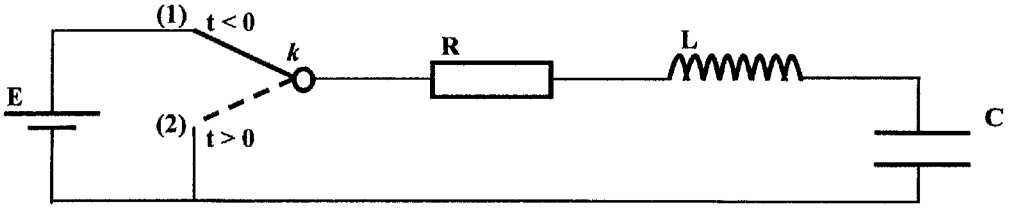
DOCUMENTS NON AUTORISES
L'USAGE DES CALCULATRICES EST INTERDIT

EXERCICE :

On se propose d'étudier, avec Maple, le comportement d'un circuit RLC série en régime libre et en régime forcé. Les équations nécessaires pour cette étude, sont données. Il suffit donc de les utiliser pour répondre aux questions.

A. Régime libre

Le circuit RLC série est alimenté par un générateur de tension continue. A l'instant $t = 0$, on bascule l'interrupteur ***k*** de la position **(1)** à la position **(2)**.



L'équation différentielle **ED** du circuit est donnée par :

$$\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} + \frac{R}{L}\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{1}{LC}\, q = 0 \quad (q \text{ dépend de } t)$$

ce qui donne l'équation caractéristique **EC** suivante :

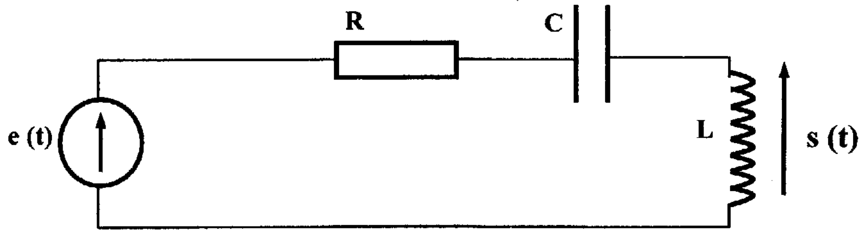
$$r^2 + \frac{R}{L} r + \frac{1}{LC} = 0 \qquad (\text{ EC est de la forme } a\,r^2 + b\,r + c = 0 \text{ }).$$

L'étude du circuit peut s'effectuer soit à partir du calcul du discriminant de **EC**, soit par résolution de **EC**, soit encore par résolution formelle de **ED**.
Donner les commandes Maple permettant de :

1) Définir les équations **ED** et **EC**.
2) Calculer le discriminant **Delta** de **EC**.
3) Résoudre l'équation caractéristique **EC**.
4) Résoudre l'équation différentielle **ED** du circuit.
5) Résoudre numériquement l'équation différentielle **ED** pour : $R = 3,\ C = 1,\ L = 1$ avec les conditions initiales : $q(0)=1,\ \frac{\partial q}{\partial t}(0)=0$.
6) Affecter à une variable **S** le résultat obtenu en 5).
7) Charger la commande *odeplot* et représenter **S** pour t allant de 0 à 20.

B. Régime forcé

On s'intéresse maintenant à la réponse fréquentielle du circuit lorsqu'il est alimenté par un générateur délivrant une tension sinusoïdale (le circuit RLC est alors en régime forcé).



La fonction de transfert complexe associée à ce circuit est $\underline{H} = \dfrac{1}{1+\dfrac{j}{Q}\dfrac{\omega}{\omega_0}-\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}}$, avec :

$\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$, $Q = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{C}{L}}$ et j est le nombre complexe vérifiant : $j^2=-1$.

Remarque: *Avec Maple,* ω_0 se note omega0 et ω se note omega.

Donner les commandes Maple permettant de :

8) Réinitialiser la session de travail.
9) Définir dans l'ordre les expressions H, ω_0 et Q.
10) Affecter à L la valeur 1, à C la valeur 10^{-4} et à R la valeur 0.01 .
11) Représenter, dans un repère cartésien, le module de H en fonction de ω $(\omega = 0..300)$.
12) Représenter, dans un repère cartésien, l'argument de H en fonction de ω $(\omega = 0..300)$.

PROBLEME :

Remarque *: Dans tout le problème et dans le cas où une fonction ou une procédure n'aurait pas été développée, elle pourra, si nécessaire, être appelée pour la résolution des questions suivantes.*

On se propose de programmer quelques méthodes permettant de résoudre les systèmes de n équations à n inconnues de la forme :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots\dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots\dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots\dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (1)$$

Nous noterons ce système sous la forme matricielle

$$Ax = b \qquad (2)$$

où A désigne la matrice des éléments a_{ij} avec $1 \le i \le n$, $1 \le j \le n$; b étant le vecteur des composantes $(b_1, b_2, \dots\dots, b_n)$ et x le vecteur des composantes $(x_1, x_2, \dots\dots, x_n)$.

I./ Utilisation de la formule de CRAMER pour la résolution du système (1)

Dans cette méthode, et pour chaque composante x_i du vecteur x, on construit une nouvelle matrice que l'on obtient en remplaçant les composantes de la colonne j de la matrice A par les composantes du vecteur résultat b. La composante x_j est calculée par division du déterminant de cette nouvelle matrice par celui de A. Il est nécessaire que le déterminant de A ne soit pas nul.

$$x_j = \frac{\begin{vmatrix} a_{11}\dots a_{1\,j-1} & b_1 & a_{1\,j+1}\dots a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}\dots a_{n\,j-1} & b_n & a_{n\,j+1}\dots a_{nn} \end{vmatrix}}{\det(A)} \qquad (3)$$

Calcul du déterminant d'une matrice :

Plusieurs algorithmes permettent le calcul du déterminant d'une matrice. Nous retenons ceux du développement selon les éléments d'une ligne ou d'une colonne.

Soit A une matrice carré d'ordre n. On note $A_{i\,j}$ la matrice obtenue en supprimant dans A la $i^{ème}$ ligne et la $j^{ème}$ colonne. Le développement du déterminant de A (noté $\det(A)$) selon les éléments de la $i^{ème}$ ligne est donné par :

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (\ a_{i\,j}\,(-1)^{i+j}\det(A_{i\,j})\,) \qquad (4)$$

Celui du développement selon les éléments de la $j^{ème}$ colonne est donné par :

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (\ a_{i\,j}\,(-1)^{i+j}\det(A_{i\,j})\,) \qquad (5)$$

Le calcul est d'autant plus accélérée si l'on choisit parmi les lignes et colonnes, celle qui contient le maximum de coefficients $a_{i\,j}$ nuls.

On suppose pour la suite que les systèmes à résoudre contiennent au maximum 100 équations à 100 inconnues et on suppose avoir effectuer les déclarations suivantes :

Constante **NMAX**=100
Type **VECT** = tableau [1.. NMAX] de réels
Type **MAT** = tableau [1.. NMAX, 1.. NMAX] de réels

Questions :

1) Ecrire une fonction algorithmique, sans paramètres, appelée **DEGRE**, qui permet de saisir, avec contrôle, et retourner un entier compris entre 1 et NMAX.

2) Ecrire une procédure algorithmique, appelée **SAISIVECT**, qui permet la saisie des coefficients d'un vecteur de degré n dans un tableau B et qui prend comme paramètres :
n : entier paramètre donné passé par valeur   B : VECT paramètre résultat passé par variable.

3) Ecrire une procédure algorithmique, appelée **SAISIMAT**, qui permet la saisie des coefficients d'une matrice carrée de degré n dans un tableau X et qui prend comme paramètres :
n : entier paramètre donné passé par valeur   X : MAT paramètre résultat passé par variable.

4) Ecrire une procédure algorithmique, appelée **MINUS** , qui permet, à partir d'un tableau X à deux dimensions et de taille n*n, de construire un tableau Y à deux dimensions et de taille (n-1)*(n-1) dans lequel est supprimé la $i^{ème}$ ligne et la $j^{ème}$ colonne de X. Cette procédure prend comme paramètres :
n : entier paramètre donné passé par valeur   i : entier paramètre donné passé par valeur
X : MAT paramètre donné passé par valeur.   j : entier paramètre donné passé par valeur.
Y : MAT paramètre résultat passé par variable

5) Ecrire une procédure algorithmique, appelée **REMPLACE**, qui permet, à partir d'un tableau X à deux dimensions et de taille n*n et d'un tableau B de dimension 1 et de taille n, de construire un tableau Y de dimension 2 et de taille n*n dans lequel la $j^{ème}$ colonne du tableau X est remplacée par les éléments du tableau B. Cette procédure prend comme paramètres :
n : entier paramètre donné passé par valeur   Y : MAT paramètre résultat passé par variable
X : MAT paramètre donné passé par valeur.   j : entier paramètre donné passé par valeur.
B : VECT paramètre donné passé par valeur.

6) Ecrire une procédure algorithmique, appelée **SELECTLIGNE**, qui permet, à partir d'un tableau X à deux dimensions et de taille n*n, de déterminer la ligne i contenant le maximum de zéros ainsi que le nombre nb de zéros contenus dans cette ligne. Cette procédure prend comme paramètres :

n : entier paramètre donné passé par valeur — i : entier paramètre résultat passé par variable
X : MAT paramètre donné passé par valeur. — nb : entier paramètre résultat passé par variable.

7) Ecrire une procédure algorithmique, appelée **SELECTCOLONNE**, qui permet, à partir d'un tableau X à deux dimensions et de taille n*n, de déterminer la colonne j contenant le maximum de zéros ainsi que le nombre nb de zéros contenus dans cette colonne. Cette procédure prend comme paramètres :

n : entier paramètre donné passé par valeur — j : entier paramètre résultat passé par variable
X : MAT paramètre donné passé par valeur. — nb : entier paramètre résultat passé par variable.

Les procédures **MINUS, REMPLACE, SELECTLIGNE** et **SELECTCOLONNE** peuvent être utilisées pour le calcul du déterminant d'une matrice. Pour la suite du problème, on suppose avoir déjà défini la fonction **DETERMINANT** d'entête :

DETERMINANT(n : entier, **X** : MAT **) : réel** avec **n** et **X** paramètres formels recevant respectivement le degré et les coefficients de la matrice.

Cette fonction retourne le déterminant d'une matrice et sera appelée en cas de besoin.

8) Ecrire une procédure algorithmique, appelée **METHODE1**, qui permet de résoudre (si possible) le système (2) ($Ax = b$) par utilisation de la formule de CRAMER. Les coefficients de la matrice A (de degré n) sont contenus dans un tableau A, les coefficients du vecteur b (de degré n) sont contenus dans un tableau B et les coefficients du vecteur résultat x seront contenus dans un tableau X. Cette procédure prend comme paramètres :

n : entier paramètre donné passé par valeur — B : VECT paramètre donné passé par valeur.
A : MAT paramètre donné passé par valeur. — X : VECT paramètre résultat passé par variable.

II./ Résolution de système (1) par calcul de l'inverse

A partir de l'équation (2) ($Ax = b$) et en supposant que la matrice A est inversible, on peut calculer le vecteur résultat x par la relation :

$$x = A^{-1}b \qquad (6)$$

On rappelle que chaque coefficient x_i du vecteur résultat x est obtenu par la relation :

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_j \qquad (6')$$

avec a_{ij} le coefficient de A^{-1} d'indices ij et b_j le coefficient d'indice j du vecteur b.

On note A_{ij} la matrice obtenue en supprimant dans A la i$^{\text{ème}}$ ligne et la j$^{\text{ème}}$ colonne et on pose AD une matrice de même ordre que A, dont chaque terme ad_{ij} est calculé par la relation :

$$ad_{ij} = (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}) \qquad (7)$$

a_{ij} (respectivement ad_{ij}) représente le coefficient d'indices ij de la matrice A (respectivement AD).

Le calcul de l'inverse est donné par la relation :

$$A^{-1} = \frac{(AD)^t}{\det(A)} \qquad (8)$$

$(AD)^t$ représente la transposé de AD. (la transposée est obtenue en inversant les lignes et les colonnes).

9) Ecrire une procédure algorithmique, appelée **CALCULAD**, qui permet, à partir d'un tableau X à deux dimensions et de taille n*n, contenant les coefficients d'une matrice A, de calculer dans un tableau Y (même dimension et même taille que X) les coefficients ad_{ij} d'une matrice AD (voir relation (7)). Cette procédure prend comme paramètres :

n : entier paramètre donné passé par valeur — Y : MAT paramètre résultat passé par variable.
X : MAT paramètre donné passé par valeur.

10) Ecrire une procédure algorithmique, appelée **TRANSPOSE**, qui permet, à partir d'un tableau X à deux dimensions et de taille n*n, contenant les coefficients d'une matrice carré de degré n, de calculer dans un tableau Y (même dimension et même taille que X) les coefficients de la transposée de cette matrice. Cette procédure prend comme paramètres :

n : entier paramètre donné passé par valeur Y : MAT paramètre résultat passé par variable.
X : MAT paramètre donné passé par valeur.

11) Ecrire une procédure algorithmique, appelée **INVERSE**, qui permet, à partir d'un tableau X à deux dimensions et de taille n*n, contenant les coefficients d'une matrice carré de degré n, de calculer dans un tableau Y (même dimension et même taille que X) les coefficients de l'inverse de cette matrice. Cette procédure prend comme paramètres :

n : entier paramètre donné passé par valeur Y : MAT paramètre résultat passé par variable.
X : MAT paramètre donné passé par valeur.

12) Ecrire une procédure algorithmique, appelée **METHODE2**, qui permet de résoudre (si possible) le système (2) par calcul de l'inverse. Les coefficients de la matrice carrée A (de degré n (n<=100)) sont contenus dans un tableau A, les coefficients du vecteur b (de degré n) sont contenus dans un tableau B et les coefficients du vecteur résultat x seront contenus dans un tableau X. Cette procédure prend comme paramètres :

n : entier paramètre donné passé par valeur B : VECT paramètre donné passé par valeur.
A : MAT paramètre donné passé par valeur. X : VECT paramètre résultat passé par variable.

III./ Résolution de système (1) par la méthode dite directe

Nous pouvons remarquer que si le système (1) se présente sous la forme suivante :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots\dots\dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{22}x_2 + \dots\dots\dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (9)$$

et en supposant qu'aucun des termes a_{ii} ,$1 \le i \le n$, n'est nul, on peut résoudre le système comme suit :

$$\begin{cases} x_n = \dfrac{b_n}{a_{nn}} \\ x_i = \dfrac{b_i - \sum\limits_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j}{a_{ii}} \qquad i = n-1, n-2, \dots\dots\dots, 1 \end{cases} \qquad (10)$$

Pour pouvoir utiliser cette méthode, il faut rendre le système (1) triangulaire supérieure. Pour cela, on procède comme suit :

Etape1

- On vérifie que l'élément a_{11} est non nul sinon on permute la ligne 1 avec la première ligne du système à premier coefficient non nul.
- On applique la relation $L_i \leftarrow L_i - \dfrac{a_{i1}}{a_{11}} L_1$ sur les coefficients des lignes de 2 à n (L_i représente les coefficients de la ligne i de A).

Etape k

- On vérifie que l'élément a_{kk} est non nul sinon on permute la ligne k avec la première ligne (parmi les lignes de k+1 à n du système) qui présente un coefficient d'indice colonne k non nul

- On applique la relation $L_i \leftarrow L_i - \frac{a_{ik}}{a_{kk}} L_k$ sur les coefficients des lignes de k+1 à n (L_i représente les coefficients de la ligne i de A).

L'étape1 permet de rendre nul les coefficients de a_{21} à a_{n1} de la première colonne de la matrice. Il faut donc ré-appliquer cette démarche, au reste de la matrice, étape après étape, jusqu'à obtenir une matrice triangulaire supérieure.

13) En supposant qu'aucun des termes a_{ii} ,$1 \leq i \leq n$ (relation 9), n'est nul, Ecrire une procédure algorithmique, appelée **TRIANGLE,** qui permet de rendre la matrice A du système (2), triangulaire supérieure. Les coefficients de la matrice A (d'ordre 2 de degré n) sont contenus dans un tableau A. Cette procédure prend comme paramètres :

n : entier paramètre donné passé par valeur A : MAT paramètre résultat passé par variable

14) Ecrire une procédure algorithmique, appelée **METHODE3**, qui permet de résoudre (si possible) le système (2) par utilisation de la méthode dite directe. Les coefficients de la matrice A (d'ordre 2 de degré n) sont contenus dans un tableau A, les coefficients du vecteur b (de degré n) sont contenus dans un tableau B et les coefficients du vecteur résultat x seront contenus dans un tableau X. Cette procédure prend comme paramètres :

n : entier paramètre donné passé par valeur B : VECT paramètre donné passé par valeur.
A : MAT paramètre donné passé par valeur. X : VECT paramètre résultat passé par variable.

IV./ Résolution MAPLE et comparaison des différentes méthodes

Nous voulons comparer les différentes méthodes de résolution du système (1) présentées dans les parties I, II, III et celle de Maple et cela par calcul du temps d'exécution de chacune des méthodes. Le temps d'exécution pourrait être obtenu en faisant appel à la commande time() avant et après l'appel de la fonction dont on désire calculer le temps d'exécution. La commande time() retourne en effet, une valeur représentant le temps CPU. Il suffit donc de calculer la différence entre les deux valeurs retournées par time() pour connaître la durée d'exécution d'une fonction.

Remarque : On suppose, pour la suite, que les procédures et fonctions des parties I, II et III sont programmées avec MAPLE.

15)

a. Définir puis résoudre dans Maple le système S défini par :

$$S = \begin{cases} \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{4}x_3 = 1 \\ \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{5}x_3 = 2 \\ \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{5}x_2 + \frac{1}{6}x_3 = 3 \end{cases} \qquad (11)$$

b. Définir dans Maple une matrice A constituée par les coefficients en x_i du système S

c. Définir dans Maple un vecteur b constitué par les coefficients du vecteur résultat du système S.

d. Ecrire dans Maple une procédure, appelée **METHODE4**, qui permet de résoudre le système S défini en (11). A,b et x (vecteur résultat) étant les arguments de la procédure.

e. Ecrire dans Maple une procédure, appelée **COMPARAISON**, qui permet la résolution du système S par les différentes méthodes de résolutions présentées en I, II, et III et celle de Maple. et d'indiquer la méthode la plus rapide pour la résolution de ce système. A, b, x et la taille n étant les arguments de la procédure.