MATHEMATIQUES - PROGRAMMES DETAILLES - 1ère Année

SECTION TECHNO
SECTION PHYSIQUE CHIMIE

PROGRAMME POUR LES SECTIONS TECHNO ET PHYSIQUE CHIMIE

ALGEBRE ET GEOMETRIE

Le programme d'algèbre et géométrique est organisé autour des concepts fondamentaux d'espace vectoriel et d'application linéaire, et de leurs interventions en algèbre et en géométrie. La maîtrise de l'algèbre linéaire élémentaire en dimension finie constitue un objectif essentiel.

Le cadre d'étude est bien délimité : brève mise en place des concepts d'espace vectoriel, d'application linéaire, de sous- espaces vectoriels supplémentaires, d'algèbre et de produit scalaire, sous leur forme générale, en vue notamment des interventions en analyse ; en dimension finie, étude des concepts de base, de dimension et de rang, mise en place du calcul matriciel, étude des espaces vectoriels euclidiens ; interventions de l'algèbre linéaire en géométrie affine et en géométrie euclidienne.

La maîtrise de l'articulation entre le point de vue géométrique (vecteurs et points) et le point de vue matriciel constitue un objectif majeur. Le programme combine, de façon indissociable, la mise en place des concepts de l'algèbre linéaire avec l'étude des problèmes linéaire (indépendance linéaire, équations linéaire, approximation des fonctions, propriétés affines et métriques des configurations, études des automorphismes orthogonaux et des isométries …).

Pour les groupes, les anneaux, le programme se limite à quelques définitions de base et aux exemples usuels; toute étude générale de ces structures est hors programme.

Le programme d'algèbre et géométrie comporte la construction, l'analyse et l'emploi d'algorithmes numériques (division euclidienne et recherche de PGCD dans Z, opérations élémentaires sur les matrices en algèbre linéaire …) et de calcul formel (polynômes et fractions rationnelles …) ; plus largement, le point de vue algorithmique est à prendre en compte pour l'ensemble de ce programme.

I. NOMBRE ET STUCTURES ALGEBRIQUES USUELLES
1. Ensembles, applications
L'objectif est d'acquérir le vocabulaire usuel sur les ensembles, les applications et les relations. Toute étude systématique, a fortiori toute axiomatique, de la théorie des ensembles est exclue.
Le programme se limite strictement aux notions de base figurant ci-dessous. Ces notions doivent être acquises progressivement par les étudiants au cours de l'année, au fur et à mesure des exemples rencontrés dans les différents chapitres d'algèbre, d'analyse et de géométrie. Elles ne doivent pas faire l'objet d'une étude exhaustive bloquée en début d'année.

a) Ensemble, opérations sur les parties
Ensembles, appartenances, inclusion. Ensemble P(E) des parties de E. Opérations sur les parties : intersection, réunion, complémentaire. Produit de deux ensembles.

b) Applications, lois de composition
Une application f de E dans (vers) F est définie par son ensemble de départ E, son ensemble d'arrivée F et son graphe G.

Ensemble F(E, F) des applications de E dans F.
Ensemble EI des familles d'éléments d'un ensemble E indexées par un ensemble I.
Composée de deux applications, application identique. Restriction et prolongement d'une application.
Equations, applications injectives, surjectives, bijectives.
Applications réciproque d'une bijection. Composée de deux Injections, de deux surjections, de deux bijections.
Définition des images directe et réciproque d'une partie ; comptabilité de l'image réciproque avec les opérations sur les parties.
Fonction caractéristique d'une partie, lien avec les opérations sur les parties.
Définitions d'une loi de composition interne. Associativité, commutativité, élément neutre. Définition d'un monoide, éléments inversibles. Notations additive et multiplicative d'une loi de composition.

c) Relations d'ordre
Définition d'une relation d'ordre, ordre total, ordre partiel.
Majorants, minorants, plus grand et plus petit élément.

2. Nombres entiers naturels, ensembles finis, dénombrement
En ce qui concerne les nombres entiers naturels et les ensembles finis, l'objectif principal est d'acquérir la maîtrise du raisonnement par récurrence. Les propriétés de l'addition, de la multiplication et de la relation d'ordre dans N sont supposées connues ; toute construction et toute axiomatique de N sont hors programme.
L'équipotence des ensembles infinis et la notion d'ensemble dénombrable sont hors programme.

En ce qui concerne la combinatoire, le programme se limite strictement aux exemples fondamentaux indiqués ci- dessous. L'objectif est d'apprendre à organiser les ensembles étudiés, ce qui permet en outre de les dénombrer.

a) Nombres entiers naturels
Propriétés fondamentales de l'ensemble N des nombres entiers naturels. Toute partie non vide a un plus petit élément ; principe de récurrence. Toute partie majorée non vide a un plus grand élément.
Suites d'éléments d'un ensemble E (indexées par une partie de N). Suite définie par une relation de récurrence et une condition initiale.

b) Ensembles finis

c) Somme et produits

3. Structures algébriques usuelles
L'objectif est d'acquérir le vocabulaire élémentaire sur les structures algébriques usuelles suivantes : groupes, anneaux et corps, espaces vectoriels, algèbre. Toute étude des structures algébriques générales est hors programme.

Le programme se limite strictement aux notions de base indiquées ci- dessous. Ces notions doivent être acquises progressivement par les étudiants au cours de l'année, au fur et à mesure des exemples rencontrés dans les différents chapitres d'algèbre, d'analyse et de géométrie. Elles ne doivent pas faire l'objet d'une étude exhaustive bloquée en début d'année.

Vu l'importance capitale de l'algèbre linéaire, le programme comporte l'étude des concepts d'espace vectoriel, d'application linéaire et algèbre ; cette étude fait l'objet d'un approfondissement dans le cadre des espaces vectoriels de dimension finie (cf. parties II et III).

En revanche, pour les groupes, les anneaux et les corps, le programme se limite à quelques définitions élémentaires et aux exemples usuels.
En algèbre linéaire, le programme se limite au cas où le corps de base est K, où K désigne R ou C.

a) Groupes
b) Anneaux et corps
c) Espaces vectoriels
d) Algèbres

4. Polynômes et fractions rationnelles
L'objectif est d'étudier, part des méthodes élémentaires, les propriétés de base des polynômes et des fractions Rationnelles, et d'exploiter ces objets formels pour la résolution de problèmes portant sur les équations algébriques et les fonctions numériques.
Le programme se limite au cas où le corps de base K est R ou C.

a) Algèbre K [X] et corps K (X)
b) Fonctions polynomiales et rationnelles
c) polynômes scindés
d) Etude locale d'une fraction rationnelle

5. Travaux pratiques
- Exemples d'étude de problèmes de sommation.
- Exemples de recherche de polynômes satisfaisant à des Conditions données (interpolation, équations aux différences Finies, équations différentielles…).
- Exemples d'obtention de la décomposition d'un polynôme en produit de facteurs irréductibles.
- Exemple d'étude d'équations algébriques à coefficients réels ou complexes.
- Pratique de la décomposition en éléments simples dans C d'une fraction rationnelle n'ayant que des pôles simples ou doubles.

ALGEBRE ET GEOMETRIE AFFINE
L'objectif est double :
- Acquérir les notions de base sur les espaces vectoriels de dimension finie (indépendance linéaire, bases, dimension, sous-espace vectoriel supplémentaire et projecteurs, rang), le calcul matriciel et la géométrie affine réelle (sous-espace affine, barycentres, applications et transformation affines).
- Maîtriser les relations entre le point de vue géométrique (vecteurs et applications linéaires, points et applications affines) et le point de vue matriciel.
Il convient d'étudier conjointement l'algèbre linéaire et la géométrie affine et, dans les deux cas, d'illustrer les notions et les résultats par de nombreuses figures.
Dans toute cette partie, les espaces vectoriels considérés sont de dimension finie et, pour la pratique, le programme se limite au cas où le corps de base K est R ou C.

1. Espaces vectoriels de dimension finie
L'étude des espaces vectoriels et des applications linéaires est à mener de front avec celle du calcul matriciel.

a) Familles libres, familles génératrices, bases
b) Dimension d'un espace vectoriel
c) Dimension d'un sous- espace vectoriel
d) Rang d'une application linéaire

2. Calcul matriciel
Le calcul matriciel présente deux aspects qu'il convient de mettre en valeur :
- Calcul sur des tableaux de nombres, interprétés en termes d'applications linéaires de KP dans KN munis de leurs bases canoniques.
- Expression dans des bases d'une application linéaire d'un espace vectoriel dans un autre.
Un des objectifs importants est d'interpréter matriciellement un changement de base dans un espace vectoriel,

puis d'étudier l'effet d'un changement de base(s) sur la matrice associée à un endomorphisme (à une application linéaire). En revanche, les notions de matrices semblables et de matrices équivalentes sont hors programme.

a) Opérations sur les matrices
b) Matrices et applications linéaires
c) Opérations élémentaires sur les matrices
d) Rang d'une matrice
e) Systèmes d'équations linéaires
f) Déterminant d'ordre 2 et 3

3. Géométrie affine réelle
L'objectif est double :
- Familiariser les élèves avec le langage affine.
- Exploiter les outils de l'algèbre linéaire pour approfondir l'étude des propriétés affines du plan et de l'espace, déjà abordée dans les classes antérieures.
En revanche, l'étude des espaces affines généraux est hors programme ; le programme se place dans le cadre de sous-espace affines des espaces vectoriels et des applications affines d'un espace vectoriel dans un autre point afin de relier ce point de vue à celui adopter dans les classes antérieures, il convient de donner brièvement la définition d'un espace affine V de direction un espace vectoriel E, et de signaler que le choix d'une origine permet d'identifier espace affine et espace vectoriel. Dans tout le programme, on effectue cette identification.

Dans ce chapitre, le corps de base est R et les espaces vectoriels considérés sont de dimension inférieure à 3. Pour les travaux pratiques et les sujets d'évaluation, on se limitera aux applications directes du cour dans le cadre du plan et de l'espace de dimension 3.

a) Translation, sous- espace affines
b) Applications affines, transformations affines
c) Repérés cartésiens
d) Barycentres

4. Travaux pratiques
- Exemples d'étude de l'indépendance linéaire d'une famille finie de vecteurs.
- Exemples de construction de bases et de sous-espaces vectoriels supplémentaires, et d'emploi de bases, de supplémentaires et de changements de bases, notamment pour l'étude des équations linéaires.
- Exemples d'étude de systèmes d'équation linéaires (résolution des systèmes de Cramer, détermination du rang, recherche d'une base de l'espace vectoriel des solutions d'un système linéaire homogène, existence et calcul d'une solution particulière lorsque r= n ou r= p)
- Emploi des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes d'une matrice à coefficients numériques pour la résolution des systèmes de Cramer par l'algorithme du pivot partiel, le calcul de déterminants, l'inversion des matrices carrées, la détermination du rang d'une matrice.

ESPACES VECTORIELS EUCLIDIENS ET GEOMETRIE EUCLIDIENNE

L'objectif est double :
- Acquérir les notions de base sur le produit scalaire, sur les espaces vectoriels euclidiens (bases orthonormales, supplémentaires orthogonaux, projecteurs orthogonaux, automorphismes orthogonaux, matrices orthogonales) et sur la géométrie euclidienne du plan et de l'espace (distances, angles, isométries, déplacements, similitudes directes).
- Maîtriser les relations entre le point de vue géométrique (vecteurs et automorphismes orthogonaux, points et isométries) et le point de vue matriciel.
Il convient d'étudier conjointement les espaces vectoriels euclidiens et la géométrie affine euclidienne et, dans les deux cas, d'illustrer les notions et les résultats par de nombreuses figures.

La mesure de l'angle orienté de deux vecteurs unitaires de R2 est définie à 2p prés, par l'application de R sur U. Toute définition géométrique des angles est hors programme.
Dans la pratique, on se limitera aux espaces de dimension inférieure ou égale à 3.

1. Produit scalaire, espaces vectoriels euclidiens
a) Produit scalaire
b) Espaces vectoriels euclidiens de dimension n, où n = 2 ou 3
c) Automorphismes orthogonaux
d) Automorphismes orthogonaux du plan
e) Automorphismes orthogonaux de l'espace

2. Géométrie euclidienne du plan et de l'espace
Pour les travaux pratiques et les sujets d'évaluation, on se limitera aux applications directes du cour.

a) Distances, angles
b) Isométries et similitudes
c) Cercles et Sphères
d) Coniques
e) Nombres complexes et géométrie plane

3. Travaux pratiques
- Exemples de construction de bases orthogonales et de supplémentaires orthogonaux, et d'emploi de bases orthonormales, de supplémentaires orthogonaux et de changements de bases orthonormales.
- Exemples d'emploi du produit scalaire, de produit vectoriel et du plan mixte pour l'étude de configurations du plan et de l'espace (calcul de projections orthogonales, de distances, de mesures d'angles, d'aires, de volumes…)
- Exemples de recherche de lignes de niveau, définies notamment par des conditions portant sur des distances et des mesures d'angles.
- Exemples de recherche des isométries laissants invariante une configuration du plan, de recherche des déplacements et des réflexions laissants invariante une configuration de l'espace.

ANALYSE ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE

Le programme d'analyse est organisé autour des concepts fondamentaux de suite et de fonction. La maîtrise du calcul différentiel et intégral à une variable et de ses interventions en géométrie différentielle constitue un objectif essentiel.

Le cadre d'étude est bien délimité : suites de nombres réels et de nombres complexes, fonctions définies sur un intervalle de R à valeurs réelles ou complexes, courbes planes, notions élémentaires sur les fonctions de deux variables réelles.

Le programme combine l'étude globale des suites et des fonctions (opérations, majorations, caractère lipschitzien, monotonie, convexité, existence d'extremums …) et l'étude de leur comportement local ou asymptotique. En particulier, il convient de mettre en valeur le caractère local des notions de limite, de continuité, de dérivabilité, et de tangente.

Il combine aussi l'étude des problèmes qualitatifs (monotonie d'une suite ou d'une fonction, existence de limites, continuité, existence de zéros et d'extremums, existence de tangentes …) avec celle des problèmes quantitatifs (majoration, évaluation asymptotique de suites et de fonctions, approximation de zéros et d'extremums de fonctions, propriétés métriques des courbes planes …)

En analyse, les majorations et les encadrements jouent un rôle essentiel. Tout au long de l'année, il convient donc de dégager les méthodes usuelles d'obtentions de majorations et de minorations : opérations sur les intégrales, emploi de la valeur absolue ou du module, emploi du calcul différentiel et intégral (recherche d'extremum, inégalités des accroissements finis et de la moyenne, majorations tayloriennes…). Pour comparer des nombres, des suites ou des fonctions, on utilise systématiquement des inégalités larges (qui sont compatible avec le passage à la limite), en réservant les inégalités strictes aux cas où elles sont indispensables.

En ce qui concerne l'usage des quantificateurs, il convient d'entraîner les étudiants à savoir les employer pour formuler de façon précise certains énoncés et leurs négations. (caractère borné, croissance, monotonie, existence d'une limite, continuité en un point, continuité sur un intervalle, continuité uniforme, dérivabilité en un point…). En revanche, il convient d'éviter tout recours systématique aux quantificateurs. A fortiori leur emploi abusif (notamment sous forme d'abréviations dans un texte) est exclu.

Le programme d'analyse et géométrie différentielle comporte la construction, l'analyse et l'emploi d'algorithmes numériques (approximations de solutions d'équations numériques, approximation d'une intégrales…) et d'algorithmes de calcul formel (dérivation, primitivations …) ; plus largement, le point de vue algorithmique est à prendre en compte pour l'ensemble de ce programme, notamment pour le tracé des courbes.

NOMBRES REELS ET COMPLEXES, SUITES ET FONCTIONS

Pour l'existence et la recherche de limite de suites ou de fonctions, il convient d'utiliser les résultats établis dans le cours, de préférence au recours direct à la définition.

4. Nombres réels et complexes

Il est souvent commode d'identifier la droite euclidienne munie d'une base orthonormale au R-espace vectoriel R, ce qui permet d'exploiter le langage de la géométrie pour étudier les nombres réels.
La notion de corps totalement ordonnés est hors programme.

f) Corps R des nombres réels
g) Groupe R*+
h) Corps des nombres complexes

5. Suites de nombres réels ou complexes

L'objectif est double :
- Etude du comportement global et asymptotique d'une suite donnée, en relation avec la description des phénomènes discrets.
- Description et mise en œuvre d'algorithmes d'approximation d'un nombre réel à l'aide de suites et comparaison de leurs performances en relation avec l'étude des fonctions et les problèmes de mesures de grandeurs géométriques et physiques.

En ce qui concerne le comportement global et asymptotique d'une suite, il convient de combiner l'étude des problèmes qualitatifs (monotonie, convergence, divergence…) avec celle des problèmes quantitatifs (majorations, encadrement, vitesse de convergence ou de divergence par comparaison aux suites de référence usuelles…)
Il convient de mettre en valeur, tant au niveau du cour que des problèmes, le fait que pour étudier la convergence d'une suite vers un nombre a, il est utile de ramener l'étude à la convergence de vers 0.

Pour la notion de limite d'une suite de nombres réels ou complexes, on adopte les définitions suivantes :
- Etant donnée un nombre a, on dit que admet a pour limite si, pour tout nombre réel , il existe un entier N tel que, pour tout entier n, la relation implique la relation ; le nombre a est alors unique et on le note . Lorsqu'un tel nombre a existe on dit que la suite est convergente. Dans le cas contraire on dit qu'elle est divergente.
- Si la suite est réelle, on défini de manière analogue la notion de limite lorsque ou , on dit alors que diverge vers ou vers .

a) Suites de nombres réels ou complexes

- Limite d’une suite
- Cas des suites réelles
- Théorème d’existence de limite
- Relations de comparaison

6. Fonctions d’une variable réelle à valeurs réelles ou complexes
L’objectif est double :
- Etudier le comportement global et local d’une fonction donnée, en relation avec la description de l’évolution des phénomènes continus.
- Emploi de fonctions pour l’étude des problèmes numériques (majorations d’expressions, problèmes d’optimisation, solutions d’équations numériques, d’équations différentielles, mesures de grandeurs géométriques ou physiques…)

En ce qui concerne le comportement global et local (ou asymptotique) d’une fonction, il convient de combiner l’étude des problèmes qualitatifs (monotonie, existence de zéros, existence d’extremums, existence de limites, continuité, dérivabilité…) avec celle des problèmes quantitatifs (majorations, encadrement, caractère lipschitzien, comparaison aux fonctions de référence au voisinage d’un point…).

Il convient de mettre en valeur, tant au niveau du cour que des problèmes, le fait que pour établir qu’un nombre b est limite d’une fonction f, il est utile de se ramener au cas b = 0.
Dans ce chapitre, on considère des fonctions définies sur un intervalle I de R contenant au moins deux points et à valeurs réelles ou complexes.

Pour la notion de limite d’une fonction f en un point a (adhérent à I), on adopte les définitions suivantes :
- Etant donnée deux nombres a et b, on dit que f admet b pour limite en a si, pour tout nombre réel , il existe un nombre réel tel que, pour tout élément x de I, la relation implique la relation ; le nombre b est alors unique et on le note . Lorsqu’un tel nombre b existe, on dit que la fonction f admet une limite dans K (= R ou C) en a.
- On défini de manière analogue la notion de limite lorsque ou .
- Si la fonction f est réelle, on défini de manière analogue la notion de limite lorsque ou .

Dans un souci d’unification, on dit qu’une propriété portant sur une fonction définie sur I est vraie au voisinage d’un point a si elle est vraie sur l’intersection de I avec un intervalle ouvert de centre a lorsque a est réel, avec un intervalle]c,+ [lorsque a = + , avec un intervalle]- ,c[lorsque .

Tout autre vocabulaire topologique est hors programme.

a) Fonctions d’une variable réelle à valeurs réelles ou complexes
- Etude locale d’une fonction
- Cas des fonctions réelles
- Relations de comparaison
- Fonctions continues sur un intervalle

7. Travaux pratiques
- Exemples d’obtention de majoration et de minoration d’expressions réelles ou du module d’expressions complexes;
- Exemples d’emploi pour l’étude des suites et des fonctions.
- Exemples d’études du comportement global et asymptotique de suites de nombres réels, de nombres complexes.
- Exemples d’étude de suites de nombres réels définies par une relation de récurrence du type et d’emploi d’une telle suite pour l’approximation d’un point fixe a de f.
- Exemples d’étude du comportement local et asymptotique de fonction d’une variable réelle.
- Exemples d’étude du comportement global d’une fonction d’une variable réelle à valeurs réelles : variations, zéros, signe.

FONCTIONS D’UNE VARIABLE REELLE : DERIVATION ET INTEGRATION

Le programme est organisé autour de trois axes :
- Dérivation en un point et sur un intervalle ; notions sur la convexité.
- Intégration sur un segment des fonctions continue par morceaux à partir de l’intégration des fonctions en escalier.
- Théorème fondamental reliant l’intégration et la dérivation : exploitation de ce théorème pour le calcul différentiel et intégral et notamment pour les formules de Taylor.

Aussi bien pour l’étude locale que pour l’étude globale des fonctions, le programme combine de manière indissociable les outils de calcul différentiel et du calcul intégral.

L’étude générale de la dérivation et de l’intégration doit être illustrée par de nombreux exemples portant sur les fonctions usuelles (qui, pour des commodités de rédaction ne figurent qu’au chapitre 5) et celles qui s’en déduisent.

Les fonctions considérées dans cette partie sont définies sur un intervalle I de R contenant au moins deux points et à valeurs réelles ou complexes.

1. Dérivation des fonctions à valeurs réelles ou complexes

Dérivée en un point, fonctions dérivée
- Etude globale des fonctions dérivables réelles
- Développements limités
- Fonctions convexes

8. Intégration sur un segment

Le programme se limite à l’intégration des fonctions continue par morceaux sur un segment. La notion de fonction réglée est hors programme.

a) Fonction continue par morceaux
- Intégrale d’une fonction continue par morceaux
- Intégrale d’une fonction complexe

9. Intégration et dérivation

Primitive et intégrale d’une fonction continue
- Formules de Taylor
- Approximation d’une intégrale par la méthode des trapèzes

10. Equations différentielles

L’objectif, très modeste, est d’étudier les équations différentielles linéaires du premier ordre et les équations linéaires second ordre à coefficients constants.

Il convient de relier cette étude à l’enseignement des autres disciplines scientifiques (systèmes mécaniques ou électriques gouvernés par une loi d’évolution et une condition initiale, traitement du signal). Il convient d’étudier le comportement du signal de sortie associé à différents types de signaux d’entrée (échelon unité, créneau, exponentielle réelle ou circulaire) et de dégager la signification de certains paramètres ou comportements : stabilité, régime permanent, oscillation, amortissement, fréquences propres, résonance. Dans le cadre de tels problèmes, on peut être amené à étendre la notion de solution (fonction ou par morceaux) mais, en mathématique, aucune connaissance sur ce point n’est exigible des étudiants.

Solutions d’une équation différentielle
- Equations linéaires d’ordre 1

- Equations linéaires du second ordre à coefficients constants

11. Fonctions usuelles
Les fonctions étudiées dans ce chapitre sont à utiliser comme exemples pour illustrer les notions des chapitres précédents.

Fonctions exponentielles, logarithmes, puissances
- Fonctions circulaires
- Fonctions exponentielles complexe
- Primitives des fonctions usuelles
- Développement limité des fonctions usuelles
- Caractérisation des fonctions usuelles

12. Travaux pratiques
- Exemple d'emploi du calcul différentiel et intégral pour l'étude globale des fonctions : variation, recherche de zéros et du signe d'une fonction, obtention de majorations et minorations de suites et de fonctions, recherche d'extremums, inégalités de convexité.
- Exemples d'algorithmes d'approximation d'une solution d'une équation numérique et de comparaison de leurs performances.
- Exemples de calculs de primitives et d'intégrales.
- Exemples d'algorithmes de calcul approché d'intégrales et de comparaison de leurs performances.
- Exemples d'étude d'équations différentielles : équations linéaires du premier ordre, équations linéaires du second ordre à coefficients constants, équations à variables séparables.

NOTIONS SUR LES FONCTIONS DE DEUX VARIABLES REELLES

Elle constitue une première prise de contact avec les fonctions de plusieurs variables ; toute technicité est à éviter aussi bien pour la présentation du cours qu'au niveau des exercices et problèmes.
L'objectif, très modeste, est double :
- Etudier quelques notions de base sur les fonctions de deux variables réelles (continuité, dérivation et intégration).
- Exploiter les résultats obtenus pour l'étude de problème, issus notamment des autres disciplines scientifiques.

En vue de l'enseignement de ces disciplines, il convient d'étendre brièvement ces notions aux fonctions de trois variables réelles. Mais, en mathématiques, les seules connaissances exigibles des étudiants ne portent que sur les fonctions de deux variables.

Les suites d'éléments de R2 et les fonctions d'une variable réelle à valeurs dans R2 ont déjà été étudiées en se ramenant aux suites et fonctions à valeurs réelles par passage aux coordonnées (cf. chapitres I. et II.).
Il convient de mettre en valeur le fait que la plupart des problèmes concernant les fonctions de deux variables réelles peuvent se ramener aux problèmes correspondant aux fonctions d'une variable en paramétrant le segment , ce qui permet d'écrire où, pour tout , .

1. Espace R2, fonctions continues
Les fonctions considérées dans ce chapitre sont définies sur une partie A de R2. Pour la pratique, on se limite aux cas où A est définie par des conditions simples.

Pour définir la notion de limite, on procède comme pour les fonctions d'une variable réelle.

Espace R2
- Fonctions continues de deux variables

13. Fonctions de deux variables à valeurs réelles : calcul différentiel
Les fonctions considérées dans ce chapitre sont définies sur un ouvert U de R2 et à valeurs réelles.
L'objectif essentiel est d'introduire quelques notions de base : dérivée selon un vecteur, dérivées partielles, développement limité à l'ordre 1, gradient et de les appliquer aux extremums locaux et aux coordonnées polaires ; en revanche, les notions de fonction différentiable en un point et de différentielle sont hors programme.

En vue de l'enseignement des autres disciplines scientifiques, il convient d'étendre brièvement ces notions au cas où f est définie sur un ouvert de R3 et de définir les coordonnées cylindriques et sphériques mais, en mathématique, aucune connaissance sur ces points n'est exigible des étudiants.

Dérivées partielles premières
- Dérivées partielles d'ordre
- Coordonnées polaires

14. Fonctions de deux variables réelles : calcul intégral
En vue de l'enseignement des autres disciplines scientifiques, il convient de donner quelques notions sur les intégrales doubles et triples :
- Intégrales doubles sur une partie bornée définie par des conditions simples.
- Linéarité, croissance, invariance par translation. Additivité par rapport au domaine d'intégration .

- Exemples de calculs d'intégrales doubles par intégrations successives.
- Exemples simples de changement de variables : changement de variables affine, passage aux coordonnées polaires.
- Brève extension aux intégrales triples.
- Exemples d'applications aux calculs d'aires planes, de volumes, de masses, de centres et de moments d'inertie) ; sur ces points aucune difficulté théorique ne doit être soulevée, et notamment sur la régularité des domaines d'intégration.

15. Travaux pratiques
- Exemples de calcul et d'emploi de dérivées partielles.
- Exemples de recherche d'extremums.

GEOMETRIE DIFFERENTIELLE
Les fonctions considérées dans ce chapitre sont de classe sur un intervalle I de R (où) et sont à valeurs dans le plan euclidien R2. En outre, pour la présentation des notions du cours, on suppose que les arcs paramétrés ainsi définis sont réguliers à l'ordre 1, c'est à dire que tous leurs points sont réguliers.

1. Courbes du plan
L'objectif est double :
- Etudier différents modes de définition des courbes planes (représentation cartésienne, paramétrique, polaire, équation implicite).
- Etudier quelques propriétés métriques fondamentales des courbes planes (abscisse curviligne, repère de Frenet, courbure).

Il convient de relier l'étude des courbes définies par une équation implicite à l'enseignement des autres disciplines scientifiques (lignes équipotentielles et lignes de champ).

Pour les courbes paramétrées, la démarche du programme est de partir du point de vue cinématique (donnée d'un paramétrage) et d'introduire ensuite la notion de propriété géométrique en étudiant l'effet d'un changement de paramétrage.

Courbes paramétrées
- Etude locale d'un arc orienté de classe
- Modes de définition d'une courbe plane
- Propriétés métriques des courbes planes paramétrées

16. Travaux pratiques
- Exemples d'emploi de représentations cartésiennes, paramétriques (en particulier polaire) et implicites pour la recherche de lieux géométriques, l'étude locale et globale des courbes planes. Exemples de tracés de courbes planes.
- Exemples d'étude de propriétés métriques des courbes planes (longueur d'un arc, repère de Frenet, courbure…).